Exercice 1

(a) L'erreur d'arrondi à la seconde décimale suit une loi uniforme $(-0.05, 0.05)$. Quelle est la probabilité que l'erreur absolue d'une somme de 1000 nombres soit plus petite que 2 ?

(b) On lance une pièce équilibrée 400 fois. Quelle est la probabilité que 'pile' apparaisse plus de 180 fois et moins que 210 fois ?

(c) A chaque pari, un joueur perd 1.- avec probabilité 0.7, 2.- avec probabilité 0.2 et gagne 10.- avec probabilité 0.1. Donner une approximation de la probabilité que le joueur perde après 100 paris.

Exercice 2

Une variable aléatoire X a la densité suivante : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-2x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

(a) Déterminer λ pour que $f(x)$ soit une densité.

(b) Calculer $M(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ et en déduire $\mathbb{E}(X) =: \mu$ et $\mathrm{Var}(X)$.

(c) Calculer $\mathrm{P}(|X - \mu| > 1)$.

(d) Utiliser l'inégalité de Chebyshev pour obtenir une borne supérieure de $\mathrm{P}(|X - \mu| > 1)$. Comparer avec le résultat obtenu en (c).

Exercice 3

Soit une famille de variables aléatoires $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n}$ i.i.d d'espérance μ finie. Par la loi forte des grands nombres, on sait que la moyenne arithmétique converge vers μ. Qu'en est-il de la moyenne géométrique

$$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right)^{1/n} \longrightarrow ?$$

Exercice 4

(a) Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires. Supposons que $\mathbb{E}(X_n) \to \theta$ (θ fini) et $\mathrm{Var}(X_n) \to 0$. Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta$.

(b) Une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ converge en probabilité vers l'infini si pour tout $M > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(X_n \leq M) = 0.$$

Supposons que $\mathbb{E}(X_n) \to \infty$ et $\mathrm{Var}(X_n) \leq k\mathbb{E}(X_n)$ pour un $k < \infty$. Montrer que X_n converge en probabilité vers l'infini.
Indication : Utiliser l'inégalité de Chebyshev pour montrer que :

$$\mathrm{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| > \varepsilon \mathbb{E}(X_n)) \to 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$\boxed{\text{À rendre jusqu'au mardi 18 décembre 2012, à 18h}}$