

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire ayant une densité de probabilité de la forme $\theta x^{\theta-1}$ pour $0 < x < 1$, où $\theta \in \{1, 2\}$. On veut tester l'hypothèse $H_0 : \theta = 1$ contre l'alternative $H_1 : \theta = 2$. On fait deux observations x_1 et x_2 de la variable aléatoire X . On décide de rejeter l'hypothèse si $x_1 \cdot x_2 \geq \frac{3}{4}$. Calculer l'erreur de type I et la puissance de ce test.

Exercice 2. Test du quotient de vraisemblance.

Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon aléatoire issu d'une variable X de densité $g_\theta(x) = \theta \exp(-\theta x)$ pour $x, \theta \geq 0$. On veut tester $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta_1$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance pour θ .

(a) Montrer que la statistique du test du quotient de vraisemblance s'écrit

$$\Lambda = \frac{L(x, \theta_0)}{L(x, \theta_1)} = e^{n(\theta_0 \bar{X}_n)^n} \exp(-n\theta_0 \bar{X}_n).$$

(b) Donner la règle de décision pour ce test (utiliser le lemme de Neyman-Pearson).

Indication : $2\theta_0 \sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi du Chi-Carré à $2n$ degrés de liberté (sans preuve).

Exercice 3. Test d'hypothèse et p -valeur.

On veut vérifier le calibrage d'un alcotest utilisé depuis 3 ans. Les données suivantes sont les résultats obtenus avec l'instrument en question; les 30 mesures ont été réalisées sur un alcotest type; un appareil bien calibré aurait dû donner une valeur de 12.6. Les valeurs mesurées en pour mille ont été multipliées par 100 pour simplifier la saisie.

12.3	12.7	13.6	12.7	12.9	12.6	12.6	13.1	12.6	13.1
12.7	12.5	13.2	12.8	12.4	12.6	12.4	12.4	13.1	12.9
13.3	12.6	12.7	13.1	12.4	12.4	13.1	12.4	12.9	12.6

- (a) Si μ désigne la vraie valeur moyenne faite par ce type d'alcotest sur une personne dont le taux d'alcool est 12.6 (unité simplifiée), tester $H_0 : \mu = 12.6$ contre l'alternative $H_1 : \mu \neq 12.6$. Recommandez-vous la recalibration de l'appareil ?
- (b) Donner la p -valeur pour ces données.
- (c) Quelles hypothèses statistiques sont implicites dans le test d'hypothèse fait en (a) ? Y a-t-il une raison de suspecter que ces hypothèses ne soient pas vérifiées ?
- (d) Comparer vos résultats avec le t-test implémenté en R (utiliser la commande `t.test(...)`).

Exercice 4. T-test.

Une compagnie propose deux types de peinture - une peinture "normale" et une autre plus chère. La compagnie prétend que la deuxième sorte met une heure de moins à sécher que la première. Un magazine de consommateurs a voulu vérifier cette information et a fait peindre 40 planches avec chaque produit. Le temps de séchage moyen avec la première sorte de peinture a été de 2h06 (écart-type : 12 minutes). Pour l'autre peinture, le temps moyen a été de 1h36 (écart-type : 16 minutes).

Tester l'hypothèse nulle "la peinture la plus chère met une heure de moins pour sécher". Utiliser une alternative unilatérale et $\alpha = 0.05$. On suppose que les observations sont normales. (Faites un test "à la main" et comparer le résultat avec R).

À rendre jusqu'au **lundi 13 mai 2013**, à la séance d'exercices.