Exercice 1 (Densité d'un quotient).

(a) Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de densité f, resp. g. Si $Y > 0$ avec probabilité 1, montrer que la densité $h(z)$ de la variable aléatoire X/Y est donnée par

$$h(z) = \int_0^\infty x f(zx) g(x) dx.$$

(b) Calculer $\mathrm{P}(X/Y < 5)$ et montrer que $\mathbb{E}(X/Y) = \infty$ dans le cas où X et Y sont des variables aléatoire i.i.d. de loi uniforme sur $(0, 1)$.

Exercice 2 (Distribution de Student à n degré de liberté).
Soient $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \sim \chi^2_n$ deux variables aléatoires indépendantes.

(a) Calculer la densité de $\frac{X}{\sqrt{Y}}$.

(b) En déduire que la loi d'une variable aléatoire de Student $T_n = \sqrt{n}\frac{X}{\sqrt{Y}}$ vaut :

$$f_{T_n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(1 + \frac{z^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}$$

Exercice 3 (Loi log-normale).
On considère une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, notons sa densité $f(x)$ et sa fonction de répartition $F(x)$. On définit la variable aléatoire $Y = e^X$, Y suit une loi log-normale de paramètre μ et σ^2.

(a) Déterminer la densité $g(y)$ de Y.

(b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

(c) Notons $S(n)$ le prix après n semaines d'un titre coté en bourse. Un modèle courant en finance veut que les *rapports des prix* d'une semaine à la suivante soient des v.a. i.i.d. log-normale. Soient ici les paramètres $\mu = 0,0165$ et $\sigma^2 = 0.049$, quelle est la probabilité que

  (i) le prix croisse d'une semaine à la suivante,

  (ii) le prix croisse dans chacune des *deux* semaines suivantes,

  (iii) le prix soit plus élevé après deux semaines qu'aujourd'hui?

À rendre jusqu'au mardi 11 décembre 2012, à 18h