Exercice 1 (Loi exponentielle et loi de Poisson).
Soit $\{T_i\}_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, i.e. de densité $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$, et soit $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$.

(a) Vérifier que les T_i n'ont pas de mémoire, i.e. $\mathrm{P}(T_i > t + s \mid T_i > t) = \mathrm{P}(T_i > s)$, et calculer $\mathbb{E}(T_i)$.

(b) Montrer par récurrence sur n que S_n possède la densité $f_n(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}, t > 0$.

(c) Soit $T > 0$ un temps fixé et X la variable aléatoire indiquant le nombre d'indices j avec $S_j < T$. Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λT.
Indication : $\{X = j\} = \{S_j \leq T < S_{j+1}\} = \{S_{j+1} > T\} \setminus \{S_j > T\}$

(d) Dans la pratique, on modélise souvent la durée de vie d'un objet par une loi exponentielle. Dans ce cadre, on considère une ampoule qui brûle jusqu'à sa défection et est remplacée instantanément par une nouvelle, chacune ayant une durée de vie moyenne de 4 mois. Si l'on a acheté un stock de 3 ampoules au départ, quelle est la probabilité d'avoir encore de la lumière après une année ?

Exercice 2 (Temps d'attente).

(a) Soient deux variables aléatoires X et Y indépendantes distribuées selon la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On considère la variable aléatoire $T = \max(X, Y) - \min(X, Y)$. Quelle est la distribution de T.

(b) Un homme et une femme se rendent en même temps dans deux magasins l'un en face de l'autre. Les durées que chacun passent dans leur magasin respectif sont indépendantes et distribuées exponentiellement avec temps moyens 5 et resp. 10 minutes. Combien de temps doit attendre en moyenne celui ou celle qui sort en premier ?

Exercice 3
Soit $V \sim \mathrm{Unif}(0, 1)$. Calculer la fonction de répartition de $W = -\frac{1}{\lambda}\log(V)$ et sa densité. De quelle loi s'agit-il ?

Exercice 4 (Densité du χ^2 à n degré de liberté).

(a) La fonction Gamma est définie par $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{R}(z) > 0$.
Vérifier que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$. En déduire que pour un entier $n \geq 0$, $\Gamma(n + 1) = n!$.

(b) Soit $\{X_i\}_{i\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On appelle $f_{\chi^2_n}$ la densité de la somme $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$.

  (i) Calculer $\mathrm{P}(X_1^2 < t)$ et $\mathrm{P}(X_1^2 + X_2^2 < t)$.

  (ii) Montrer que

$$f_{\chi^2_n}(u) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}, \quad u > 0$$

  Indication : Vérifier l'ancrage pour $n = 1$ et $n = 2$ et faire le pas d'induction $n \to n + 2$ à l'aide de la formule de convolution.

À rendre jusqu'au mardi 4 décembre 2012, à 18h