Exercice 1 (Galton-Watson).
Vous êtes vendeur dans un magasin d'informatique. Lorsqu'un client passe une commande, vous devez ensuite remplir une fiche et cela vous prend 3 minutes. Pendant ce laps de temps, il y a une probabilité p_k que k nouveaux clients entrent dans le magasin et se mettent dans la file d'attente. Supposons que $p_0 = 0.2, p_1 = 0.2, p_2 = 0.6$. Vous ne pouvez prendre le café que si tous les clients ont été servis et si la file d'attente est vide.

Il est 10h, un client entre dans le magasin. Si ces conditions demeurent, quelle est la probabilité que vous puissiez faire votre pause café ?
On suppose que chaque client passe une commande et que personne ne quitte la file d'attente avant d'avoir été servi.

Exercice 2
Dans un disque de rayon R, on choisit un point au hasard de manière uniforme. Soit D la variable aléatoire qui donne la distance de ce point à l'origine. Calculer la densité de D et l'espérance de D.

Exercice 3 (Loi uniforme).
On considère $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$.

(a) Soit $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Calculer la densité de Y, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

(b) En déduire, sans calcul, $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$ où $Z = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Exercice 4

(a) La densité jointe de X et Y est donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} x \exp(-(x + y)) & \text{si } x > 0, y > 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

(b) Même question avec la densité jointe suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < x < y, 0 < y < 1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À rendre jusqu'au mardi 27 novembre 2012, à 18h