Exercice 1

Soit X une variable aléatoire dont la densité est $f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{si } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(a) Calculer la valeur de c.

(b) Quelle est la fonction de répartition de X ?

(c) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 2

Dans une population, la taille des hommes suit une distribution normale de moyenne $\mu = 167$ cm et de déviation standard $\sigma = 3$ cm.

(a) Quelle est la probabilité de mesurer plus que 170 cm, de mesurer entre 161 cm et 175 cm ?

(b) Dans un échantillon de 4 hommes, quelle est la probabilité que :

   (i) tous ont une taille plus grande que 170 cm ?

   (ii) deux sont plus petits que la moyenne (et les deux autres plus grands que la moyenne) ?

Exercice 3

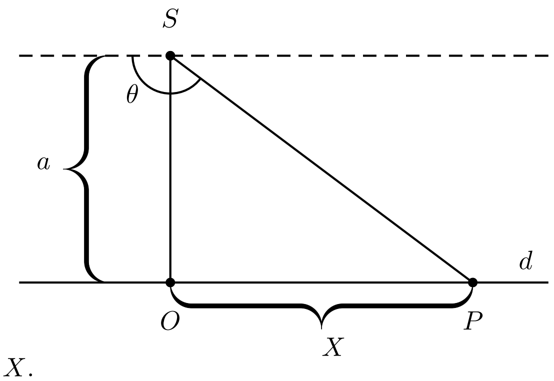
Pierre et Jacques se donnent rendez-vous à la mensa entre midi et 13h. Par hypothèse, l'instant d'arrivée du premier comme celui du second sont des variables aléatoires uniformément réparties sur l'intervalle de temps [12h,13h]. En outre, ces variables sont indépendantes.

(a) Le temps d'attente du premier arrivé est une variable aléatoire Z dont on demande la loi de probabilité. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

(b) En supposant que le premier arrivé s'en aille au bout d'une attente égale à $\mathbb{E}(Z)$, quelle est la probabilité pour que Jacques et Pierre se rencontrent ?

Exercice 4

On considére des rayons lumineux aléatoires issus d'une source ponctuelle S située à une distance $a > 0$ d'une droite d faisant office d'écran.
On suppose que l'angle aléatoire θ définissant un rayon est uniformément distribué dans $(0, \pi)$. Soit P l'intersection d'un rayon avec d et posons $X = |OP|$ (voir dessin).



(i) Déterminer la fonction de répartition de la v.a. X.

(ii) Déterminer la densité de X.

(iii) Calculer $\mathbb{E}(|X|)$.

La variable X ci-dessus est dite v.a. de Cauchy de paramètre $a > 0$.

$\boxed{\text{À rendre jusqu'au mardi 20 novembre 2012, à 18h}}$