Prof. C. Mazza **Introduction aux Statistiques, Série 6** SP 2013

Exercice 1. Propriétés d'un estimateur.
Supposons que l'on veuille, à partir d'une observation d'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$, estimer un paramètre réel inconnu $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ par une variable aléatoire $\hat{\theta}_n = h(X)$. On définit le biais $\mathrm{Biais}(\hat{\theta}_n) := \mathbb{E}_\theta(\theta - \hat{\theta}_n)$ et le risque quadratique moyen (mean square error) $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_n) := \mathbb{E}_\theta((\theta - \hat{\theta}_n)^2)$. L'estimateur $\hat{\theta}_n$ est dit *sans biais* si $\mathrm{Biais}(\hat{\theta}_n) = 0$, *asymptotiquement sans biais* si $\mathrm{Biais}(\hat{\theta}_n) \longrightarrow 0$ lorsque $n \to \infty$ et *consistant* si $\hat{\theta}_n$ converge en probabilité vers la vraie valeur θ, i.e.

$$\mathrm{P}_\theta(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall \varepsilon > 0, \quad \theta \in \Theta.$$

Un "bon" estimateur doit être asymptotiquement sans biais, consistant et de variance la plus petite possible. Montrer que :

(a) $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_n) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n) + \mathrm{Biais}(\hat{\theta}_n)^2$

(b) si $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_n) \longrightarrow 0$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $\theta \in \Theta$, alors $\hat{\theta}_n$ est consistant.
Indication : utiliser l'inégalité de Markov.

Exercice 2. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$, $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$, $\mathbb{E}(X_1) = \theta$ et $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$.

(a) Montrer que $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i} X_i$ est un estimateur consistant et sans biais de θ.

(b) Montrer que $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$ est un estimateur consistant et sans bias de σ^2.

Exercice 3. Estimation d'une variable uniforme.
Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ un n-échantillon issu de la variable aléatoire X de loi uniforme sur $[0, \theta]$ où θ est à estimer.

(a) Montrer que $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n}\max\{X_1, \dots, X_n\}$ est un estimateur sans biais de θ.

(b) Comparer l'information de Fisher de X et la variance de $\hat{\theta}$. Que remarquez-vous ?

Exercice 4. Variable exponentielle.
Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ un n-échantillon issu de la variable aléatoire exponentielle X de densité $g_\theta(x) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}x}$, $\theta > 0$.

(a) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ. Montrer que $\hat{\theta}$ est sans biais et qu'il est de variance minimale dans l'ensemble des estimateurs sans biais de θ.

(b) Pour quelle valeur de a le risque quadratique moyen $\mathbb{E}_\theta((a\hat{\theta} - \theta)^2)$ est minimal ?

À rendre jusqu'au vendredi 12 avril, à 12h.