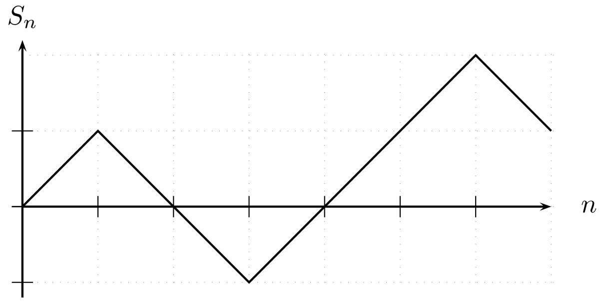
Exercice 1 (Special élection - problème du voteur).
Lors d'une élection, le candidat A a obtenu α voix, le candidat B, β voix ($\alpha > \beta$).
Quelle est la probabilité que, durant le dépouillement, le candidat A ait toujours précédé le candidat B.
Appliquez votre résultat aux élections présidentielles américaines.

Marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.
Le reste de la série est consacrée à l'étude d'un processus stochastique $\{S_n\}_{n\geq 0}$ simple, la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$, définie de la manière suivante :

$$S_0 = 0 \text{ et } S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

où X_k sont des variables aléatoires i.i.d avec $X_k = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } 1/2 \\ -1 & \text{avec probabilité } 1/2 \end{cases}$



Exercice 2 (Quelques constatations sur S_n).

(a) Donner les valeurs possibles de S_{2n} et S_{2n+1}. Quelle est l'éspérance et la variance de S_n ?

(b) Combien y a-t-il de chemins de longueur n ? Donner $N_{n,r}$ le nombre de chemins entre l'origine et un point (n, r) et en déduire $p_{n,r} = \mathrm{P}(S_n = r)$.

Exercice 3 (Retours en zéro).

(a) Calculer $u_{2n} = \mathrm{P}(S_{2n} = 0)$.

(b) Soit v_{2n} le nombre de trajectoires toujours strictement positives, i.e. les trajectoires avec $S_1 > 0$, $S_2 > 0, \ldots, S_{2n} > 0$.

  (i) Montrer en regardant ce qui se passe en $2n-1$ et avec les techniques de l'exercice 1 la relation de récurrence $v_{2n} = 4v_{2n-2} - (N_{2n-2,0} - N_{2n-2,2})$.

  (ii) En déduire $v_{2n} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$.

(c) Montrer que $\mathrm{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = u_{2n}$.

(d) Montrer qu'il y a autant de trajectoires avec $S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0$ que de trajectoires avec $S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0, S_{2n+1} > 0$.
En déduire $\mathrm{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0) = u_{2n}$.

Exercice 4 (Premier retour en zéro).
Soit $T_0 = \inf\{n > 0, S_n = 0\}$ la variable aléatoire qui indique le temps de premier retour en zéro.

(a) Montrer que $\mathrm{P}(T_0 = 2) = u_2$ et $\mathrm{P}(T_0 = 2n) = u_{2n-2} - u_{2n}$ pour $n \geq 2$, et simplifier pour obtenir $\mathrm{P}(T_0 = 2n) = \frac{u_{2n}}{2n-1}$.

(b) En utilisant la formule de Stirling $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ où $a \sim b$ veut dire $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{b} = 1$, montrer que $u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ et en déduire que $\mathrm{P}(T_0 < \infty) = \mathrm{P}(\bigcup_{k\geq 1}\{T_0 = 2k\}) = 1$.

(c) La fonction génératrice des coefficients binomiaux centraux $\binom{2n}{n}$ pour $|z| < 1$ est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

et cette série diverge si $|z| \geq 1$ (sans preuve).
En déduire que $\mathbb{E}(T_0) = \infty$.

$\boxed{\text{À rendre jusqu'au mardi 13 novembre 2012, à 18h}}$