Exercice 1 (Fonction génératrice des moments).
Pour une variable aléatoire X, on définit (si cette espérance existe) la fonction génératrice des moments de X par $\phi(t) := \mathbb{E}(t^X)$.
Calculer $\phi(t)$ puis $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ à l'aide des dérivées de ϕ en $t = 1$ pour les variables aléatoires suivantes :

(a) X de loi de Poisson de paramètre λ.

(b) X de loi binomiale $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

(c) X de loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$. ($\mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ pour $k = 1, 2, \ldots$).

Exercice 2
Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $\mathrm{Poi}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$.

(a) Montrer que $Y := X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$, en vous aidant de la fonction génératrice des moments.

(b) Montrer que la loi conditionnelle de X_1, étant donnée $X_1 + X_2$, est une loi binomiale, i.e. que

$$\mathrm{P}(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n) = \mathrm{P}(Y_n = k)$$

où Y_n suit une loi binomiale ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Exercice 3
Un gardien de nuit doit ouvrir une porte dans l'obscurité. Il possède un trousseau de n clés d'allures semblables, mais une seule peut ouvrir la porte en question. Le gardien dispose des deux méthodes suivantes pour sélectionner la bonne clé :

A méthode ordonnée qui consiste à essayer chaque clé en prenant garde de ne pas réutiliser la même clé ;

B méthode désordonnée qui consiste à essayer un clé après avoir agité le trousseau.

Soient X_A et X_B les variables aléatoires décrivant le nombre d'essais jusqu'à l'apparition de la bonne clé en utilisant les méthodes **A** respectivement **B**.
Calculer $\mathbb{E}(X_A)$ et $\mathbb{E}(X_B)$. A partir de quelle valeur de n, il est préférable d'utiliser la méthode **A** ?

Exercice 4
Soient X, Y, Z trois variables aléatoires telles que les trois couples (X, Y), (X, Z) et (Y, Z) ont le même coefficient de corrélation ρ.

(a) En supposant que $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(Z)$, montrer que $\rho \geq -\frac{1}{2}$.

(b) Montrer que $\rho \geq -\frac{1}{2}$ sans hypothèse sur les variances.

À rendre jusqu'au **lundi 5 novembre** 2012, à 18h