Exercice 1. Pour les expériences suivantes, donner les modèles statistiques appropriés.

(a) On effectue n mesures $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pour la longueur l (inconnue) d'un segment rectiligne AB. On suppose en outre que les erreurs de mesure obéissent à une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, σ^2 inconnu.

(b) On dispose d'une mesure X_1, X_2, X_3 pour chacun des angles α, β, γ d'un triangle. On suppose une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, σ^2 inconnu, pour les erreurs de mesure.

(c) Une urne contient θ (inconnu) billets numérotés de 1 à θ. On tire au hasard, avec remise, n billets de l'urne et on dénote par $(X_1, X_2, \ldots, X_n) =: X$ les numéros obtenus.

(d) Un lac contient N (inconnu) poissons. On pêche au hasard, sans remise, n poissons du lac que l'on marque. Ces poissons sont ensuite remis à l'eau. On pêche à nouveau, sans remise, m poissons du lac et on dénote par X (= observation) le nombre de poissons marqués dans l'échantillon.

Exercice 2. Méthode des moments.
A l'aide de la méthode des moments, donner un estimateur $T(X)$ pour θ, dans les cas suivants :

(a) $X := (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ où les variables aléatoires $\{X_j\}$ sont i.i.d. de loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta \in \mathbb{R}_+$.

(b) $X := (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ où les variables aléatoires $\{X_j\}$ sont i.i.d. de loi exponentielle avec paramètre $\theta > 0$.

(c) $X := (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ où les variables aléatoires $\{X_j\}$ sont i.i.d. de densité

$$f(x; \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2\theta_2}, \quad \theta_1 - \theta_2 \leq x \leq \theta_1 + \theta_2,$$

où $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ est le paramètre inconnu.

Exercice 3. Maximum de vraisemblance.
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. dont on observe la réalisation $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Trouver le ou les estimateurs du maximum de vraisemblance pour θ dans les cas suivants :

(a) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont de loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta \in \mathbb{R}_+$.

(b) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ont la densité $g_\theta(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}, \theta \in \mathbb{R}$.

(c) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ est un paramètre inconnu.

Exercice 4. Simulation.
Choisir un paramètre $\theta \in \mathbb{R}_+$ et simuler n variables de loi uniforme sur $[0, \theta]$. Comparer l'estimateur obtenu par la méthode des moments (ex. 2) et l'estimateur du maximum de vraisemblance (ex. 3). Que peut-on dire si l'estimateur obtenu par la méthode des moments est plus petit que l'estimateur du maximum de vraisemblance ?

À rendre jusqu'au vendredi 22 mars 2013, à 12h