Exercice 1 (Anniversaire).
On admet une année à 365 jours et des configurations équiprobables.

(a) On considère un groupe de n personnes. Trouver l'espérance du nombre de jours durant une année qui sont jours d'anniversaire pour exactement k personnes.

(b) Calculer l'espérance du nombre de jours durant une année qui sont jour d'anniversaire de 2 personnes dans un groupe de 23 personnes.

Exercice 2 (Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$).

(a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X > n)$.

(b) Un dé est lancé jusqu'à l'apparition d'un 1 ou d'un nombre pair. Calculer l'espérance du nombre de jets.

Exercice 3
On considère une suite de répétition d'une épreuve à deux résultats possibles A et A^c de probabilité p $(0 < p < 1)$ respectivement $q = 1 - p$. Soit $A_k^{(r)}$ l'événement suivant : à l'épreuve de rang $(r + k)$, A est réalisé pour la r-ième fois, $r \geq 1$.

(a) Calculer $p_k := \mathrm{P}(A_k^{(r)})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

(b) Une variable aléatoire X est dite *binomiale négative d'ordre* r quand elle prend les valeurs $r + k$ avec les probabilités p_k. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{r}{p}$.

Exercice 4
Soient $X, Y, X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires et soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Montrer que:

(a) $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$;

(b) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$;

(c) $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\mathrm{Cov}(X, Y)$;

(d) $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2 \sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

(e) $\mathbb{E}(|XY|) \leq \big(\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)\big)^{1/2}$

À rendre jusqu'au mardi 23 octobre 2012, à 18h