Prof. C. Mazza **Introduction aux Probabilités, Série 3** SA 2012

Exercice 1 (Indépendance).
On lance un dé blanc et un dé rouge et on observe les événements suivants:

W_i**:** Le dé blanc montre le chiffre i $(i = 1, \dots, n)$.

R_k**:** Le dé rouge montre le chiffre k $(k = 1, \dots, n)$.

A: Le chiffre du dé blanc est pair.

B: Le chiffre du dé rouge est impair.

C: La somme des chiffres des deux dés est paire.

D: La somme des chiffres des deux dés est impaire.

Est-ce que les événements W_i et R_k sont indépendants pour toute paire (i, k) ? A et B sont-ils indépendants ? Même question pour les couples A et C ; B, C et C, D. Que pouvez-vous dire de l'indépendance des événements A, B, C?

Exercice 2 (Probabilités conditionnelles).

(a) Une maladie touche 5% d'une population. Un test pour dépister la maladie s'avère positif dans le 98% des cas chez les personnes atteintes et dans le 2% des cas chez les personnes saines. Si pour une personne le test s'avère positif, quelle est la probabilité que cette personne soit malade ?

(b) Dans une population, 5 % des hommes et 0.25 % des femmes sont daltoniens (color blind, farbenblind). On choisit au hasard une personne parmi les daltoniens.

    Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme en supposant que la population est composée du même nombre d'hommes et de femmes ?

    Quelle est cette probabilité si, cette fois, on suppose qu'il y a deux fois plus d'hommes que de femmes ?

(c) La population de Nicosie se compose de 75% de grecs et de 25% de turcs. Le 20% des grecs et le 10% des turcs parlent anglais. Un touriste rencontre, en ville, une personne parlant anglais. Quelle est la probabilité que cet individu soit grec.

Exercice 3
Un marin achète deux perroquets avec l'espoir qu'ils forment un couple. Le vendeur lui assure que deux mâles sont exclus et que la probabilité pour avoir un couple est égale à $\frac{2}{3}$. Un jour, un des deux perroquets tombe malade et le vétérinaire qui soigne l'oiseau affirme qu'il s'agit d'une femelle. Le marin conclut alors que sa probabilité pour avoir un couple est tombé à $\frac{1}{2}$. Sa conclusion est-elle correcte ?

Exercice 4 (Variables aléatoires).
Dans le cas où l'événement sûr Ω est un ensemble fini, une variable aléatoire S est simplement une fonction réelle définie sur Ω, i.e. $S : \Omega \to \mathbb{R}$.
On considère l'expérience aléatoire "lancer 10 fois une pièce de monnaie équilibrée". On regarde la variable aléatoire $S :=$"nombre de côtés pile obtenus".

(a) Déterminer Ω et sa cardinalité;

(b) Pour $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ choisis librement, déterminer $S(\omega_1), S(\omega_2)$;

(c) Donner l'ensemble des valeurs possibles de S;

(d) Trouver un $\omega \in \Omega$ t.q. $S(\omega) = 4$, déterminer la cardinalité de $\{S^{-1}(4)\}$ et déduire $\mathrm{P}(S(\omega) = 4)$;

(e) Calculer $\mathrm{P}(7 \leq S \leq 9)$.

(f) Calculer $\mathbb{E}(S)$.

$\boxed{\text{À rendre jusqu'au mardi 16 octobre 2012, à 18h}}$