Exercice 1. Fréquence et histogramme.
Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{R}$, I un intervalle quelconque et $p_n(I)$ la proportion des Y_k dans l'intervalle I, i.e.

$$p_n(I) = \frac{\#k \text{ tel que } Y_k \in I}{n}$$

Montrer à l'aide de la loi faible des grands nombres que $p_n(I) \xrightarrow{P} \mathrm{P}(Y_i \in I)$.
Illustrer ce résultat avec `R` en générant un échantillon aléatoire de loi du χ-carré (`rchisq`) à n degré de liberté, puis en représentant graphiquement les fréquences (`hist(...)`) et la courbe de la densité correspondante (`dchisq`).

Exercice 2. Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale.

Lorsque λ est grand, la loi de Poisson de paramètre λ peut être approchée par une loi normale de moyenne et de variance λ.

Etudier graphiquement la validité du résultat en simulant 1000 réalisations indépendantes d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10, 20, 50, 100, \ldots$ et en comparant les histogrammes avec la courbe de la densité normale.

Utiliser les fonctions `rpois, hist(..., breaks=30,freq=F),curve(dnorm(...),add=T), ...`

Exercice 3. Théorème limite centrale (TLC).

Rappel : Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance μ et de variance $\sigma^2 < \infty$, le TLC stipule que la variable aléatoire $\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma}\right)$, où $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est la moyenne empirique, converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

Par simulation, vérifier graphiquement la validité du TLC dans le cas d'un échantillon binomial et d'un échantillon exponentiel.

Utiliser les fonctions `rbinom, rexp, hist(..., breaks=30,freq=F),curve(dnorm(...),add=T), ...`

À rendre jusqu'au vendredi 8 mars 2013, à 12h