SE 2011 **Optimisation de formes, Projet 1** Dr. Aleš Janka

Projet de semestre facultatif

`http://perso.unifr.ch/ales.janka/optimforme`

Problème de la surface minimale

Soit $\Omega \in \mathbb{R}$ un ouvert borné en 2D, avec la frontière $\Gamma = \partial\Omega$. Considérons une membrane en 3D, dont la projection dans le plan x-y occupe le domaine Ω. Cette membrane est fixée sur le bord Γ à une hauteur u_Γ au dessus du plan x-y, cf. Fig. 1. Quelle forme occupe-t-elle à l'intérieur de Ω, si elle est bien étendue? Le problème physique peut être représenté par un problème de minimisation de l'énergie de tension dans la membrane. Nous allons chercher la position $u(x, y)$ de la membrane au dessus du plan x-y, telle que l'énergie de déformation de la membrane soit minimale: cherchons $u : \mathbf{x} \in \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $u \in U$, $U = \{w \in H^1(\Omega) : w = u_\Gamma \text{ sur } \Gamma\}$, qui minimise la fonctionnelle $J(u) : U \mapsto \mathbb{R}$,

$$J(u) = \min_{v \in U} J(v), \tag{1}$$

$$J(v) = \int_\Omega \sqrt{1 + (\operatorname{grad} v)^2} d\Omega \tag{2}$$

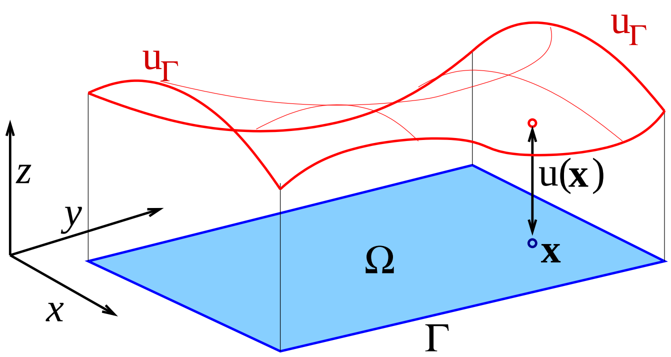

Figure 1: Problème de la surface minimale

Questions:

- Calculer le gradient $J'(u) \in V'$ au point $u \in V$. La dérivée au point $u \in V$, dans la direction $w \in V$ s'exprime par
$$J'(u)w = \frac{d}{d\alpha} J(u + \alpha w) \mid_{\alpha=0} .$$
- Discrétiser $J(u)$ et $J'(u)$ par les éléments finis, pour les fonctions $u \in V$, V étant l'espace des fonctions éléments finis, continus et linéaires par morceaux sur chaque triangle $K \in \Omega$. Un code pour discrétiser l'opérateur de Laplace sera fourni.
- Utiliser l'algorithme du gradient pour minimiser $J(u)$, c'est à dire proposer une itération du type
$$u_{i+1} = u_i - \tau g(u_i)$$
avec un pas τ optimal pour la direction de descente $g(v_i) = J'(v_i)$. Choisir u_0.
- Valider l'algorithme proposé pour le cas $u_\Gamma = 1$, $u_\Gamma = x + y$. Observer la convergence de $J(v_i)$ et $\|g_{v_i}\|$.
- Étudier la vitesse de convergence en fonction de la taille de maille h.