SP 2011 **Algèbre Linéaire II, Série 25** Prof. Dr. Anand Dessai

à remettre jusqu'au **jeudi 26 mai 2011, 16H00**

Exercice 1. (4 points)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une matrice $S \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $S^T AS$ est diagonale.

Exercice 2. (1+1+2 points)

a) Soit V un espace euclidien ou hermitien et $F : V \to V$ un endomorphisme autoadjoint. Soient v et w des vecteurs propres correspondants à des valeurs propres λ et μ de F. Alors : $\lambda \neq \mu \Rightarrow v \perp w$.

b) Soit A une matrice hermitienne $n \times n$ avec $A^k = 0$, pour un $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'on a alors $A = 0$.

c) Soit A une matrice symétrique avec polynôme caractéristique

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

Montrer que $\mathrm{rg}(A) = n - \min\{i \mid a_i \neq 0\}$.

Exercice 3. (4 points)

Soit $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ une application $\mathbb{C}$-linéaire avec valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

a) Montrer : il existe $S \in U(n)$ telle que SAS^{-1} est une matrice triangulaire supérieure.

b) Montrer : $\sum |\lambda_i|^2 \leq \mathrm{tr}(\bar{A}^T A)$ avec égalité si et seulement si les matrices A et $\bar{A}^T$ commutent (i.e. $A\bar{A}^T = \bar{A}^T A$).

Exercice 4. (4 points)

Soit $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$.

a) Déterminer une matrice symétrique $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ telle que $Q(x) = x^T \cdot A \cdot x$.

b) Trouver une base orthonormale (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $Q(\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2) = -\alpha^2 + 3 \cdot \beta^2$.

c) Trouver une base orthogonale (w_1, w_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $Q(\alpha \cdot w_1 + \beta \cdot w_2) = -\alpha^2 + \beta^2$.