SP 2011 **Lineare Algebra II, Serie 25** Prof. Dr. Anand Dessai

Lösungen abgeben bis **Donnerstag 26 Mai 2011, 16H00**

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Matrix $S \in GL_3(\mathbb{R})$, so dass $S^T AS$ diagonal ist.

Aufgabe 2. (1+1+2 Punkte)

a) Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $F : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Seien v und w Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ und μ von F. Dann gilt: $\lambda \neq \mu \Rightarrow v \perp w$.

b) Sei A eine hermitesche $n \times n$ Matrix mit $A^k = 0$, für ein $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $A = 0$.

c) Sei A eine symmetrische Matrix mit charakteristischem Polynom

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

Zeigen Sie: $\mathrm{rg}(A) = n - \min\{i \mid a_i \neq 0\}$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie: Es gibt $S \in U(n)$, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

b) Zeigen Sie: $\sum |\lambda_i|^2 \leq \mathrm{tr}(\bar{A}^T A)$ mit Gleichheit genau dann, wenn die Matrizen A und $\bar{A}^T$ kommutieren (i.e. $A\bar{A}^T = \bar{A}^T A$).

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$.

a) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ mit $Q(x) = x^T \cdot A \cdot x$.

b) Finden Sie eine Orthonormalbasis (v_1, v_2) des $\mathbb{R}^2$ mit $Q(\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2) = -\alpha^2 + 3 \cdot \beta^2$.

c) Finden Sie eine orthogonale Basis (w_1, w_2) des $\mathbb{R}^2$ mit $Q(\alpha \cdot w_1 + \beta \cdot w_2) = -\alpha^2 + \beta^2$.