SP 2011 **Algèbre Linéaire II, Série 24** Prof. Dr. Anand Dessai

à remettre jusqu'au **jeudi 19 mai 2011, 16H00**

Test : Lundi 30 Mai, 13H15 - 15H00

Exercice 1. (4 points)

Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Soit $(v_1, \ldots, v_r)$ une famille de vecteurs orthonormaux dans V. Prouver que les affirmations suivantes sont équivalentes.

a) La famille $(v_1, \ldots, v_r)$ est une base de V.

b) Pour tout $v, w \in V$ on a $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i\rangle \cdot \langle v_i, w\rangle$.

c) Pour tout $v \in V$ on a $||v||^2 = \sum_{i=1}^{r} |\langle v, v_i\rangle|^2$.

Exercice 2. (4 points)

a) Soit $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Montrer que $O(V)$ est un groupe. Montrer que $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$.

b) Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application orthogonale avec $\det F = -1$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que F peut être représentée par rapport à la base $\mathcal{B}$ par la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Exercice 3. (4 points)

Soit V un espace vectoriel euclidien et soit $F : V \to V$ un endomorphisme injectif telle que $\angle(F(v), F(w)) = \angle(v, w)$ pour tout $v, w \in V$, $v \neq 0$, $w \neq 0$ (l'application F conserve les angles). Montrer que sous cette condition il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ et une application orthogonale $G : V \to V$, telles que $F = \lambda \cdot G$.

Exercice 4. (4 points)

Soit l'hyperplan affine H donné par $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\}$ et soit $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ (voir Série 23, Ex. 4). La distance de H à u est définie par

$$\mathrm{d}(u, H) := \inf\{||u - v|| \mid v \in H\}.$$

a) Montrer qu'on a

$$d(u, H) = \frac{|a_1u_1 + \ldots + a_nu_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

b) Soit N un vecteur orthogonal à H avec $||N|| = 1$ et $v \in H$. Montrer la forme normale de Hesse de l'équation d'un hyperplan :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle N, x - v\rangle = 0\}.$$

Exercice 5. (Bonus - 4 points)

a) Soit $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$. Montrer que A est une réflection par rapport à la droite engendrée par le vecteur $\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^T$.

b) Pour la matrice

$$A = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} 66 & 6\sqrt{6} & -14\sqrt{18} \\ -18\sqrt{6} & 72 & -9\sqrt{12} \\ 10\sqrt{18} & 15\sqrt{12} & 60 \end{pmatrix},$$

trouver une matrice $S \in U(3)$ telle que la matrice $\overline{S}^T AS$ est diagonale.