SP 2011 **Lineare Algebra II, Serie 24** Prof. Dr. Anand Dessai

Lösungen abgeben bis **Donnerstag 19 Mai 2011, 16H00**

Test : Montag 30 Mai, 13H15 - 15H00

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Sei $(v_1, \ldots, v_r)$ eine Familie von orthonormalen Vektoren in V. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $(v_1, \ldots, v_r)$ ist eine Basis von V.

b) Für alle $v, w \in V$ gilt: $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i\rangle \cdot \langle v_i, w\rangle$.

c) Für jedes $v \in V$ gilt: $||v||^2 = \sum_{i=1}^{r} |\langle v, v_i\rangle|^2$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass $O(V)$ eine Gruppe ist. Zeigen Sie, dass $SO(n)$ eine Untergruppe von $O(n)$ ist.

b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Abbildung mit $\det F = -1$. Zeigen Sie: Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ des $\mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass F bzgl. $\mathcal{B}$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ dargestellt wird.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $F : V \to V$ ein injektiver Endomorphismus mit $\angle(F(v), F(w)) = \angle(v, w)$ für alle $v, w \in V$, $v \neq 0$, $w \neq 0$ (d.h. F erhält Winkel). Zeigen Sie, dass es dann eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, und ein orthogonale Abbildung $G : V \to V$ gibt mit $F = \lambda \cdot G$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei H die affine Hyperebene gegeben durch $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\}$ und sei $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ (siehe Serie 23, Aufg. 4). Der Abstand von H zu u ist definiert durch

$$\mathrm{d}(u, H) := \inf \{||u - v|| \mid v \in H\}.$$

a) Zeigen Sie:
$$d(u, H) = \frac{|a_1u_1 + \ldots + a_nu_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

b) Sei N ein Vektor orthogonal zu H mit $||N|| = 1$ und sei $v \in H$. Zeigen Sie die Hessesche Normalform für die Hyperebene:
$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle N, x - v\rangle = 0\}.$$

Aufgabe 5. (Bonus - 4 Punkte)

a) Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass A die Spiegelung entlang der Geraden, die durch den Vektor $\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^T$ erzeugt wird, beschreibt.

b) Geben Sie für die Matrix
$$A = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} 66 & 6\sqrt{6} & -14\sqrt{18} \\ -18\sqrt{6} & 72 & -9\sqrt{12} \\ 10\sqrt{18} & 15\sqrt{12} & 60 \end{pmatrix}$$
eine Matrix $S \in U(3)$ an, so dass $\overline{S}^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.