SP 2011 **Algèbre Linéaire II, Série 23** Prof. Dr. Anand Dessai

à remettre jusqu'au **jeudi 12 mai 2011, 16H00**

Test : Lundi 30 Mai, 13H15 - 15H00

Exercice 1. (4 points)

a) Trouver une base orthonormale du sous-espace vectoriel U de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1,1,1,1)^T \quad , \quad v_2 = (5,4,2,1)^T \quad , \quad v_3 = (-2,-4,-3,1)^T.$$

b) Déterminer le complément orthogonal $U^\perp$ de U dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. (4 points)

a) Sur $M(n \times n, \mathbb{R})$, on définit $\langle A, B\rangle := \text{tr}(A^T \cdot B)$. Montrez que $\langle ., . \rangle$ définit un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M(n \times n, \mathbb{R})$.

b) Soit $||x|| := \max(|x_i|, i = 1, ..., n)$ sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Montrez qu'il n'existe pas de produit scalaire $<,>$, avec $||x|| = \sqrt{<x, x>}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 3. (4 points)

a) Soit $(V, < \cdot, \cdot >)$ un espace vectoriel hermitien et $F : V \to V$ une application unitaire. Soit v un vecteur propre qui correspond à la valeur propre λ et soit w un vecteur propre qui correspond à la valeur propre μ. Montrer que

$$(\lambda \neq \mu) \Longrightarrow (v \perp w).$$

b) Soit $A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & \sqrt{\mathbf{3}} & 0 \\ 1-i & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$. Montrer que $A \in U(3)$. Determiner l'inverse A^{-1}.

Exercice 4. (4 points)

Un sous-ensemble H de $\mathbb{R}^n$ s'appelle *hyperplan affine* s'il est un sous-ensemble affine de dimension $n-1$, c'est-à-dire s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ et un sous-espace vectoriel $W \subset \mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$ tels que $H = v + W$. Soit $H = v + \text{span}(w_1, \ldots, w_{n-1}) \subset \mathbb{R}^n$ un hyperplan affine. On dit que $s \in \mathbb{R}^n$ est *orthogonal* à H si $\langle s, x - y\rangle = 0$ pour tout $x, y \in H$.

Montrer les affirmations suivantes.

a) s est orthogonal à $H \Longleftrightarrow s \perp w_i$, pour tout $i = 1, \ldots, n-1$.

b) Si l'hyperplan affine H est donné par $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\}$, alors $(a_1, \ldots, a_n)^T$ est orthogonal à H.