SP 2011 **Lineare Algebra II, Serie 23** Prof. Dr. Anand Dessai

Lösungen abgeben bis **Donnerstag 12 Mai 2011, 16H00**

Test : Montag 30 Mai, 13H15 - 15H00

Aufgabe 1. (4 Punkte)

a) Finden Sie eine Orthonormalbasis für den Untervektorraum U von $\mathbb{R}^4$, wobei U erzeugt sei von den Vektoren

$$v_1 = (1, 1, 1, 1)^T \quad , \quad v_2 = (5, 4, 2, 1)^T \quad , \quad v_3 = (-2, -4, -3, 1)^T.$$

b) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U in $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Auf $M(n \times n, \mathbb{R})$ definieren wir $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(A^T \cdot B)$. Zeigen Sie, dass $\langle ., .\rangle$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $M(n \times n, \mathbb{R})$ ist.

b) Sei $||x|| := \max(|x_i|, i = 1, ..., n)$ auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass es kein Skalarprodukt $<,>$ gibt mit $||x|| = \sqrt{< x, x >}$, für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

a) Sei $(V, < \cdot, \cdot >)$ ein unitärer Vektorraum und $F : V \to V$ eine unitäre Abbildung. Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ und sei w ein Eigenvektor zum Eigenwert μ. Zeigen Sie, dass

$$(\lambda \neq \mu) \Longrightarrow (v \perp w).$$

b) Sei $A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & \sqrt{\mathbf{3}} & 0 \\ 1-i & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass $A \in U(3)$. Bestimmen Sie das Inverse A^{-1}.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Eine Teilmenge H von $\mathbb{R}^n$ heisst *affine Hyperebene*, falls H ein affiner Unterraum der Dimension $n - 1$ ist, das heisst, falls es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ und einen Untervektorraum $W \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension $n - 1$ gibt mit $H = v + W$. Sei $H = v + \mathrm{span}(w_1, \ldots, w_{n-1}) \subset \mathbb{R}^n$ eine affine Hyperebene. Man sagt, dass $s \in \mathbb{R}^n$ *orthogonal* auf H ist, falls $\langle s, x - y\rangle = 0$ für alle $x, y \in H$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) s ist orthogonal auf $H \Longleftrightarrow s \perp w_i$, für alle $i = 1, \ldots, n - 1$.

b) Ist die affine Hyperebene H gegeben durch

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\},$$

so ist $(a_1, \ldots, a_n)^T$ orthogonal auf H.