SP 2011 **Algèbre Linéaire II, Série 22** Prof. Dr. Anand Dessai

à remettre jusqu'au **jeudi 5 mai 2011, 16H00**

Exercice 1. (4 points)

Soit V un espace vectoriel réel et $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire sur V avec norme $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R},\ v \mapsto \sqrt{\langle v, v\rangle}$, et métrique $d : V \times V \to \mathbb{R},\ d(v,\tilde{v}) := \|\tilde{v} - v\|$. A montrer :

a) $\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$ pour tout $v, w \in V$.

b) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$ pour tout $v, w \in V$.

c) $d(v,z) \leq d(v,w) + d(w,z)$ pour tout $v, w, z \in V$.

d) $d(v,z) \geq |d(v,w) - d(w,z)|$ pour tout $v, w, z \in V$.

Exercice 2. (4 Punkte)

a) Soit $V := C([0,2\pi],\mathbb{R}) := \{f : [0,2\pi] \to \mathbb{R},\ f \text{ continue}\}$ l'espace vectoriel réel de dimension infinie des fonctions continues à valeurs réelles sur $[0,2\pi]$ et soit

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \langle f, g\rangle := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot g(t)\,dt.$$

A montrer : $\langle \cos t, \sin t\rangle = 0$

b) A montrer : $\int_0^{2\pi}(e^{3t}\cdot|\cos 2t|)dt \leq \sqrt{\int_0^{2\pi}\cos^2 2t\ dt}\cdot\sqrt{\int_0^{2\pi} e^{6t}dt}$

QCM (max. 8 points)

Choisissez **toutes** *les propositions correctes. Un exercice peut contenir plusieurs propositions justes. Pour toute réponse juste est compté* 1/2 *point, et pour chaque réponse fausse est retranché* 1/2 *point. Vous obtenez au moins au total de* 0 *point pour le QCM.*

Exercice 3.

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $F : V \to V$ un endomorphisme. Alors $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre si

a) il existe un vecteur $v \in V$ avec $F(v) = \lambda \cdot v$.
b) il existe un vecteur $v \in V$, $v \neq 0$, avec $F(v) = \lambda \cdot v$.
c) λ est un zéro du polynôme caractéristique p_F.
d) λ est un zéro du polynôme minimal M_F.

Exercice 4.

Soit $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ une matrice quadratique avec entrées dans le corps $\mathbb{K}$, $n \geq 1$. Alors A est trigonalisable si

a) il existe $S \in Gl_n(\mathbb{K})$, telle que SAS^{-1} est une matrice triangulaire supérieure.
b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
c) $\mathbb{K}$ est un corps algébrique fermé (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
d) le polynôme caractéristique p_A se décompose en facteurs linéaires.

Exercice 5.

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $F : V \to V$ un endomorphisme. Alors F possède une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ si

a) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et n est pair.
c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. d) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n est impair.

Exercice 6.

Soit $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ une matrice avec $A^{100} = 0$. Alors:
a) $A^2 = 0$ b) $A^3 = 0$ c) $A^4 = 0$
d) il existe une matrice inversible $X \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$, tel que XAX^{-1} est une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
e) $p_A = -M_A = -t^3$.

Exercice 7.

Soit $F : \mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^8$ une application linéaire avec $p_F = (t-2) \cdot (t+5)^4 \cdot (t-10)^3$ et $M_F = (t-2) \cdot (t+5)^2 \cdot (t-10)^2$. Alors le nombre de possibilités pour la forme normale de Jordan de F est
a) 1 b) 2 c) 4 d) 8

Exercice 8.

Soit $f = t^3 - t^2 + t - 4 \in \mathbb{C}[t]$ et $g = t^2 + 1$. Alors le reste r de la division de f par g est
a) $t^3 - t^2 + t - 4$ b) $t^2 + 1$ c) 0 d) -3

Exercice 9.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $f = t^3 - t^2 + t - 4 \in \mathbb{K}[t]$ et $g = t^2 + 1$. Alors le reste r de la division de f par g est
a) $t^3 - t^2 + t - 4$ b) $t^2 + 1$ c) 0 d) t

Exercice 10.

Soit $I \subset \mathbb{C}[t]$ l'idéal $I := \{p \in \mathbb{C}[t] \mid p(0) = p(3) = 0\}$. Alors I est engendré par le polynôme
a) t b) $t - 3$ c) $t^2 - 3t$ d) 0