FS 2011 **Lineare Algebra II, Serie 22** Prof. Dr. Anand Dessai

Lösungen abgeben bis **Donnerstag 5. Mai, 16H00**

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei V ein beliebiger reeller Vektorraum und $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf V mit Norm $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \sqrt{\langle v, v\rangle}$, und Metrik $d : V \times V \to \mathbb{R}$, $d(v, \tilde{v}) := \|\tilde{v} - v\|$. Zeigen Sie:

a) $\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$ für alle $v, w \in V$.

b) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$ für alle $v, w \in V$.

c) $d(v, z) \leq d(v, w) + d(w, z)$ für alle $v, w, z \in V$.

d) $d(v, z) \geq |d(v, w) - d(w, z)|$ für alle $v, w, z \in V$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Sei $V := C([0, 2\pi], \mathbb{R}) := \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f \text{ stetig}\}$ der reelle unendlich-dimensionale Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$ und sei

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \langle f, g\rangle := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cdot g(t)\, dt.$$

Zeigen Sie: $\langle \cos t, \sin t\rangle = 0$

b) Zeigen Sie: $\int_0^{2\pi}(e^{3t} \cdot |\cos 2t|)dt \leq \sqrt{\int_0^{2\pi} \cos^2 2t\ dt} \cdot \sqrt{\int_0^{2\pi} e^{6t} dt}$

Multiple Choice Fragen (max. 8 Punkte)

Wählen Sie alle richtigen Antworten. In einer Aufgabe können mehrere Antworten richtig sein. Für jede richtig angekreuzte Antwort wird 1/2 Punkt gegeben, für jede falsch angekreuzte Antwort wird 1/2 Punkt abgezogen. Insgesamt werden für den Multiple Choice Teil mindestens 0 Punkte vergeben.

Aufgabe 3.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V der Dimension $n \geq 1$ und $F : V \to V$ ein Endomorphismus. Dann ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert, wenn

a) es einen Vektor $v \in V$ gibt mit $F(v) = \lambda \cdot v$.
b) es einen Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, gibt mit $F(v) = \lambda \cdot v$.
c) λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms p_F ist.
d) λ eine Nullstelle des Minimalpolynoms M_F ist.

Aufgabe 4.

Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ eine quadratische Matrix mit Einträgen in einem Körper $\mathbb{K}$, $n \geq 1$. Dann ist A trigonalisierbar, wenn

a) es $S \in Gl_n(\mathbb{K})$ gibt, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.
b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist.
c) $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper (z.B. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ist.
d) das charakteristische Polynom p_A in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 5.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n \geq 1$ und $F : V \to V$ ein Endomorphismus. Dann besitzt F einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, wenn

a) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist. b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und n gerade ist.
c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist. d) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und n ungerade ist.

Aufgabe 6.

Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ eine Matrix mit $A^{100} = 0$. Dann gilt:

a) $A^2 = 0$ b) $A^3 = 0$ c) $A^4 = 0$
d) es gibt eine invertierbare Matrix $X \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$, sodass XAX^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist mit lauter Nullen in der Diagonalen.
e) $p_A = -M_A = -t^3$.

Aufgabe 7.

Sei $F : \mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^8$ eine lineare Abbildung mit $p_F = (t-2) \cdot (t+5)^4 \cdot (t-10)^3$ und $M_F = (t-2) \cdot (t+5)^2 \cdot (t-10)^2$. Dann ist die Anzahl der möglichen Jordan-Normalformen für F gleich

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8

Aufgabe 8.

Sei $f = t^3 - t^2 + t - 4 \in \mathbb{C}[t]$ und $g = t^2 + 1$. Dann ist der Rest r nach Division von f durch g gleich

a) $t^3 - t^2 + t - 4$ b) $t^2 + 1$ c) 0 d) -3

Aufgabe 9.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $f = t^3 - t^2 + t - 4 \in \mathbb{K}[t]$ und $g = t^2 + 1$. Dann ist der Rest r nach Division von f durch g gleich

a) $t^3 - t^2 + t - 4$ b) $t^2 + 1$ c) 0 d) t

Aufgabe 10.

Sei $I \subset \mathbb{C}[t]$ das Ideal $I := \{p \in \mathbb{C}[t] \mid p(0) = p(3) = 0\}$. Dann wird I erzeugt von dem Polynom

a) t b) $t - 3$ c) $t^2 - 3t$ d) 0