SP 2011 **Algèbre linéaire II, Série 21** Prof. Dr. Anand Dessai

à remettre jusqu'au **jeudi 21 avril, 16H00**

Exercice 1. (3+1 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les valeurs propres, le polynôme characteristique p_A et le polynôme minimal M_A de A.

b) Calculer les espaces propres généralisées (= les sous-espaces caractéristiques) de A.

Exercice 2. (4 points)

a) Soit $F : \mathbb{R}^{1000} \to \mathbb{R}^{1000}$ une application linéaire avec $F^3 = 5 \cdot F$. Montrer que F est diagonalisable.

b) Soit $F : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ une application linéaire

$$p_F = (t-1)^2 \cdot (t-2)^4 \quad \text{et} \quad M_F = (t-1)^2 \cdot (t-2)^2.$$

Déterminer toutes les formes normales de Jordan possibles pour F.

Exercice 3. (4 points)

Montrer pour $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ que $e^{tr(A)} = \det(\exp(A))$.

Exercice 4. (4 points)

On a le système:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & -3x_n & - & y_n & + & z_n \\ y_{n+1} & = & 4x_n & & & - & 2z_n \\ z_{n+1} & = & 3x_n & + & y_n & - & 2z_n \end{array}$$

avec $x_0 = y_0 = z_0 = 1$. Calculer (sans ordinateur!) x_{50}, y_{50} et z_{50}.
(Tipp: Utiliser l'exercice 1 et série 20, exercice 4d).