SP 2011 **Algèbre Linéaire II, Série 20** Prof. Dr. Anand Dessai

à remettre jusqu'au **jeudi 14 avril 2011, 16H00**

Exercice 1. (4 points)

On considère l'ensemble $I := \{p \in \mathbb{R}[t] \mid p(1)^2 + p(2)^2 + p(3)^2 = 0\}$.

(a) Montrer que I est un idéal.

(b) Trouver un polynôme normé $M \in \mathbb{R}[t]$ tel que $I = (M)$.

Exercice 2. (4 points)

Soit $\mathbb{K}[t]_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, $g(t) := t^2 - 32t + 7 \in \mathbb{K}[t]$ et $F : \mathbb{K}[t]_n \longrightarrow \mathbb{K}[t]_n$ l'application qui fait correspondre à un polynôme p le reste r de sa division par g ($p = q \cdot g + r$, $\deg(r) < \deg(g)$).

(a) Montrer que F est linéaire.

(b) Montrer que F est diagonalisable.

Exercice 3. (4 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que SAS^{-1} est de la forme

$$\begin{pmatrix} J_d & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & J_d & & & & & & \\ & & & J_{d-1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & J_{d-1} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & J_1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & J_1 \end{pmatrix},$$

avec $J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. (4 points)

Soit $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ et $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $(SAS^{-1})^m = SA^mS^{-1}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

(b) Soit

$$exp(B) := \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} B^k/k!$$

On sait que cette série converge vers une matrice $exp(B) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ (voir le cours d'Analyse).

Calculer $exp\begin{pmatrix} d_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{nn} \end{pmatrix}$. Montrer que $exp(SAS^{-1}) = S \cdot exp(A) \cdot S^{-1}$.

(c) Montrer que si $AB = BA$, alors

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \cdot A^k \cdot B^{m-k}.$$

(d) Soit $SAS^{-1} = D + N$, où D est une matrice diagonale, N est une matrice nilpotente avec $N^3 = 0$ et $DN = ND$.
Montrer que

$$A^{50} = S^{-1} \cdot \left(D^{50} + 50 \cdot D^{49} \cdot N + 25 \cdot 49 \cdot D^{48} \cdot N^2\right) \cdot S.$$