SP 2011 **Lineare Algebra II, Serie 20** Prof. Dr. Anand Dessai

Lösungen abgeben bis **Donnerstag den 14. April 2011, 16H00**

Aufgabe 1. (4 points)

Wir betrachten die Menge $I := \{p \in \mathbb{R}[t] \mid p(1)^2 + p(2)^2 + p(3)^2 = 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass I ein Ideal ist.

(b) Bestimmen Sie ein normiertes Polynom $M \in \mathbb{R}[t]$, so dass $I = (M)$.

Aufgabe 2. (4 points)

Sei $\mathbb{K}[t]_n$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$, $g(t) := t^2 - 32t + 7 \in \mathbb{K}[t]$ und $F : \mathbb{K}[t]_n \longrightarrow \mathbb{K}[t]_n$ die Abbildung, welche einem Polynom p den Rest r nach Division mit g zuordnet (d.h. $p = q \cdot g + r$, $\deg(r) < \deg(g)$).
Zeigen Sie

(a) F ist linear.

(b) F ist diagonalisierbar.

Aufgabe 3. (4 points)

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, so dass SAS^{-1} von der Form

$$\begin{pmatrix} J_d & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & J_d & & & & & & \\ & & & J_{d-1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & J_{d-1} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & J_1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & J_1 \end{pmatrix}$$

ist, wo $J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4. (4 points)

Sei $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass $(SAS^{-1})^m = SA^mS^{-1}$, für alle $m \in \mathbb{N}$.

(b) Sei

$$exp(B) := \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} B^k/k!$$

(aus der Analysis ist bekannt, dass diese Reihe gegen eine Matrix $exp(B) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ konvergiert.

Berechnen Sie $exp\begin{pmatrix} d_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{nn} \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $exp(SAS^{-1}) = S \cdot exp(A) \cdot S^{-1}$.

(c) Zeigen Sie: Ist $AB = BA$, so gilt

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \cdot A^k \cdot B^{m-k}.$$

(d) Sei $SAS^{-1} = D + N$, mit D eine Diagonalmatrix, N eine nilpotente Matrix mit $N^3 = 0$ und $DN = ND$.
Zeigen Sie, dass

$$A^{50} = S^{-1} \cdot \left(D^{50} + 50 \cdot D^{49} \cdot N + 25 \cdot 49 \cdot D^{48} \cdot N^2\right) \cdot S.$$