



**Exercice 1. (4 points)**

a) Soit  $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$  une matrice de la forme  $A = \begin{pmatrix} 0 & * \\ & \ddots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A^n = 0$ .

b) Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie et  $F \in \text{End}(V)$  un endomorphisme nilpotent, c.à.d. il existe un  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $F^n = 0$ . Montrer que sur  $\mathbb{R}$ ,  $F$  peut être représenté par une matrice triangulaire supérieure de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & * \\ & \ddots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 2. (4 points)**

a) Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Montrer que si  $F \in \text{End}(V)$  est diagonalisable avec les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  (toutes différentes), alors le polynôme minimal est égale à  $M_F(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_r)$ .

b) Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $F \in \text{End}(V)$ .  $p_F$  respectivement  $M_F$ , dénote le polynôme caractéristique, respectivement minimal, de  $F$ . Montrer que pour  $\lambda \in \mathbb{K}$  on a

$$p_F(\lambda) = 0 \Leftrightarrow M_F(\lambda) = 0.$$

**Exercice 3. (4 points)**

Soit  $A := \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & \ddots \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$  la matrice associée à  $F \in \text{End}(V)$  par rapport à la base  $(v_1, \dots, v_n)$ .

On définit le sous-espace  $V_k := \text{span}(v_1, \dots, v_k)$  et l'endomorphisme

$$G_k := (\lambda_1 \cdot \text{id}_V - F) \circ \cdots \circ (\lambda_k \cdot \text{id}_V - F).$$

pour  $k = 1, \dots, n$ . Montrer que  $G_k(V_k) = \{0\}$  pour tout  $k$ .

**Exercice 4. (4 points)**

a) Soit  $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  l'endomorphisme donné par la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , par rapport à la base  $(v_1, v_2, v_3)$ . Calculer le polynôme minimal de  $\varphi$ .

b) Calculer le polynôme minimal de  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .