FS 2011 **Lineare Algebra II, Serie 19** Prof. Dr. Anand Dessai

abzugeben vor **Donnerstag 7. April, 16H00**

Aufgabe 1. (4 Punkte)

a) Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K})$ eine Matrix der Form $A = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $A^n = 0$.

b) Sei V ein reeller Vektorraum endlicher Dimension und $F \in \mathrm{End}(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $F^n = 0$. Zeigen Sie, dass F als Matrix der Form $\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ dargestellt werden kann.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n. Zeigen Sie: Ist $F \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, so ist das Minimalpolynom von der Form $M_F(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_r)$.

b) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n und $F \in \mathrm{End}(V)$. Sei p_F das charakteristische und M_F das Minimalpolynom von F. Zeigen Sie: für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$p_F(\lambda) = 0 \Leftrightarrow M_F(\lambda) = 0.$$

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ die darstellende Matrix für $F \in \mathrm{End}(V)$ bezüglich der Basis $(v_1, \dots, v_n)$. Sei $V_k := \mathrm{span}(v_1, \dots, v_k)$ und sei $G_k : V \to V$ der Endomorphismus

$$G_k := (\lambda_1 \cdot \mathrm{id}_V - F) \circ \cdots \circ (\lambda_k \cdot \mathrm{id}_V - F).$$

für $k = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass $G_k(V_k) = \{0\}$ für alle k.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

a) Sei $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ der Endomorphismus gegeben durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, bezüglich der Basis (v_1, v_2, v_3). Berechnen sie das Minimalpolynom von φ.

b) Berechnen Sie das Minimalpolynom von $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.