SP 2011 **Algèbre Linéaire II, Série 18** Prof. Dr. Anand Dessai
à remettre jusqu'au **jeudi 31 mars 2011, 16H00**

Exercice 1. (4 points)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique p_A et ses zéros.

b) Trouver $S \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que SAS^{-1} soit une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 2. (4 points)

a) Soit a un nombre entier. On note $[a]$ sa classe d'équivalence dans le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Décider si la matrice

$$B = \begin{pmatrix} [1] & [-1] \\ [0] & [-2] \end{pmatrix}$$

est diagonalisable sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

b) Peut-on mettre la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sous forme triangulaire sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 3. (4 points)

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $F \in \mathrm{End}(V)$ un endomorphisme.

a) Soit $p \in \mathbb{K}[t]$ un polynôme. Montrer que si λ est une valeur propre de F, alors $p(\lambda)$ est une valeur propre de $p(F)$.

b) Soit $p \in \mathbb{K}[t]$ un polynôme de degré m tel que $p(F) = 0$. Montrer que le sous-espace vectoriel $W = \mathrm{span}(v, F(v), \ldots, F^{m-1}(v))$ est F-invariant, c'est–dire que $F(W) \subset W$.

$\longrightarrow$

Exercice 4. (4 points)

L'étude des oscillations amorties a besoin du système d'équations différentielles

$$A \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y_0} \\ \dot{y_1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix},$$

où ω et μ sont des nombres réels positifs et $y_0, y_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions différentiables avec $y_0(0) = \alpha$ et $y_1(0) = \beta$, où α, β représentent des constantes réelles.

a) Montrer que

- si $\mu < \omega$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
- si $\mu > \omega$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b) Donner l'ensemble des solutions du système (1), avec les conditions initiales $y_0(0) = \alpha$ et $y_1(0) = \beta$, pour $\mu < \omega$ et $\mu > \omega$.

c) Montrer que si $\mu = \omega$, la matrice A peut être mise sous forme triangulaire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. (bonus - 4 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 7/4 & 0 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/4 & 0 & 5/4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3/4 & 0 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3\ ,\ \mathbb{R})$.

a) Montrer que $AB = BA$.

b) Montrer que A et B sont diagonalisables.

c) Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de vecteurs propres communs (c.-à-d. (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et chaque v_i est un vecteur propre de A et de B).