FS 2011 **Lineare Algebra II, Serie 18** Prof. Dr. Anand Dessai

abzugeben vor dem 31 März, 16H00

**Aufgabe 1. (4 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**a)** Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p_A$ und seine Nullstellen.

**b)** Finden Sie eine Matrix $S \in GL_3(\mathbb{R})$, so dass $SAS^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

**Aufgabe 2. (4 Punkte)**

**a)** Sei $a$ eine ganze Zahl. Man schreibt $[a]$ für seine Äquivalenzklasse im Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Entscheiden Sie, ob die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} [1] & [-1] \\ [0] & [-2] \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ diagonalisierbar ist.

**b)** Kann man die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$ in obere Dreiecksform bringen?

**Aufgabe 3. (4 points)**

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n$ und sei $F \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus.

**a)** Sei $p \in \mathbb{K}[t]$ ein Polynom und sei $\lambda$ ein Eigenwert von $F$. Zeigen Sie, dass $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(F)$ ist.

**b)** Sei $p \in \mathbb{K}[t]$ ein Polynom vom Grad $m$ mit $p(F) = 0$. Zeigen Sie, dass der Untervektorraum $W = \mathrm{span}(v, F(v), \ldots, F^{m-1}(v))$ $F$-invariant ist, das heisst $F(W) \subset W$.

$\longrightarrow$

**Aufgabe 4. (4 points)**

Um die gedämpfte Schwingung zu verstehen, braucht man folgende Differentialgleichung

$$A \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y_0} \\ \dot{y_1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix},$$

wobei $\omega$ und $\mu$ positive reelle Zahlen sind. Hierbei sind $y_0, y_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $y_0(0) = \alpha$ und $y_1(0) = \beta$, wobei $\alpha, \beta$ für reelle Konstanten stehen.

**a)** Zeigen Sie:

- $A$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, falls $\mu < \omega$ gilt.
- $A$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$, falls $\mu > \omega$ gilt.

**b)** Geben Sie die Menge der Lösungen des Systems (1) mit den Anfangsbedingungen $y_0(0) = \alpha$ und $y_1(0) = \beta$ für $\mu < \omega$ und $\mu > \omega$ an.

**c)** Zeigen Sie: Ist $\mu = \omega$, so kann $A$ über $\mathbb{R}$ trigonalisiert werden.

**Aufgabe 5. (Bonus - 4 Punkte)**

Sei $A = \begin{pmatrix} 7/4 & 0 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/4 & 0 & 5/4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3/4 & 0 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3\ ,\ \mathbb{R})$.

**a)** Zeigen Sie, dass $AB = BA$ ist.

**b)** Zeigen Sie, dass $A$ und $B$ diagonalisierbar sind.

**c)** Bestimmen sie eine Basis $(v_1, v_2, v_3)$ aus gemeinsamen Eigenvektoren (d.h. $(v_1, v_2, v_3)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und jedes $v_i$ ist ein Eigenvektor von $A$ und von $B$).