SP 2011 | **Algèbre linéaire II, Série 15** | Prof. Dr. Anand Dessai

à rendre avant le jeudi 10 mars 2011, 16:00

Exercice 1. (4 points)

a) Déterminez les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

b) Décrivez (donnez une base) les espaces propres $\mathrm{Eig}(A; \lambda)$ correspondant à chaque valeur propre λ de $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Exercice 2. (4 points)

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \in \mathrm{End}(V)$ un endomorphisme. On dit que F est *nilpotent* s'il existe un $n \in \mathbb{N}$ avec $F^n = 0$. Montrez pour F nilpotent que :

a) zéro est la seule valeur propre de F.
b) Si F est diagonalisable, alors $F = 0$.

Exercice 3. (4 points)

a) Soit $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions infiniment différentiables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Déterminer toutes les valeurs propres de l'application

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'''. \end{array}$$

b) Montrez que les valeurs propres d'une matrice et celles de sa transposée sont les mêmes.
c) Soit $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{K})$ une matrice telle que $\sum_{i=1,\dots,n} a_{ij} = 1$ pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$. Montrez que $\lambda = 1$ est une valeur propre de A.

Exercice 4. (4 points)

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n et soient $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ et $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ deux bases de V. On dit que les deux bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont la *même orientation* si la déterminant de la matrice de passage entre les deux bases est positive, c.-à-d. $\det(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}) > 0$. Déterminez si les deux bases suivantes de $\mathbb{R}^3$ ont la même orientation. Justifiez !

$$\mathcal{A} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$