FS 2011 **Lineare Algebra II, Serie 15** Prof. Dr. Anand Dessai

abzugeben vor dem 10. März 2011, 16:00

Aufgabe 1. (4 points)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

b) Beschreiben Sie (mittels einer Basis) für jeden Eigenwert λ von $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A; \lambda)$.

Aufgabe 2. (4 points)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Man sagt F ist *nilpotent*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $F^n = 0$. Zeigen Sie für einen nilpotenten Endomorphismus F:

a) Null ist der einzige Eigenwert von F.
b) Ist F diagonalisierbar, so ist $F = 0$.

Aufgabe 3. (4 points)

a) Sei $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Abbildung

$$\begin{array}{rcl} C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'''. \end{array}$$

b) Zeigen Sie, dass eine Matrix und ihre Transponierte die gleichen Eigenwerte haben.
c) Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{K})$ eine Matrix mit $\sum_{i=1,\dots,n} a_{ij} = 1$ für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert von A ist.

Aufgabe 4. (4 points)

Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und seien $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ zwei Basen von V. Man sagt die beiden Basen definieren die *gleiche Orientierung*, falls die Determinante der Transformationsmatrix positiv ist, d.h. $\det(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}) > 0$. Entscheiden Sie, ob die beiden folgenden Basen die gleiche Orientierung definieren. Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\mathcal{A} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$