SP 2011 **Algèbre linéaire II, Série 14** Prof. Dr. Anand Dessai

à rendre avant le jeudi 3 mars 2011, 16:00

Exercice 1. (4 points)

a) Soient $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \{0, \cdots, 9\}$ nombres entiers. Montrez le suivant, seulement avec des opérations élémentaires par lignes et colonnes, sans calcul:
Si $100a+10b+c$, $100d+10e+f$ et $100g+10h+i$ sont divisibles par 12, alors le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

est aussi divisible par 12.

b) Calculez par l'induction sur n le déterminant de la $(n \times n)$-matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (4 points)

Soit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Calculez le déterminant de A avec le développement de Laplace.
b) Calculez d'abord $A^{\#}$ et puis A^{-1}.

Exercice 3. (4 points)

Soit $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Montrez les propriétés suivantes:
a) $(A^{\#})^T = (A^T)^{\#}$,
b) $(A \cdot B)^{\#} = B^{\#} \cdot A^{\#}$,
c) $\det(A^{\#}) = \det(A)^{n-1}$.

Exercice 4. (4 points)

a) Résolvez le système linéaire par la règle de Cramer:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \end{array}$$

b) Soit A une matrice $(n \times n)$ avec des entrées entieres, $A \in M(n \times n, \mathbb{Z})$. Montrez que: Il existe un $B \in M(n \times n, \mathbb{Z})$ avec $A \cdot B = E_n$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.