SP 2011 **Lineare Algebra II, Serie 14** Prof. Dr. Anand Dessai

abzugeben vor dem 3. März 2011, 16:00

Aufgabe 1. (4 Punkte)

a) Seien $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \{0, \cdots, 9\}$ ganze Zahlen. Zeigen Sie das Folgende, verwenden Sie nur elementare Zeilen- und Spaltenoperationen, ohne Rechnung:
Wenn $100a + 10b + c$, $100d + 10e + f$ und $100g + 10h + i$ durch 12 teilbar sind, dann ist die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

auch durch 12 teilbar.

b) Berechnen Sie mit Induktion über n die Determinante der $(n \times n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Determinante von A mit dem Entwicklungssatz von Laplace.
b) Berechnen Sie zunächst $A^{\#}$ und dann A^{-1}.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:
a) $(A^{\#})^T = (A^T)^{\#}$,
b) $(A \cdot B)^{\#} = B^{\#} \cdot A^{\#}$,
c) $\det(A^{\#}) = \det(A)^{n-1}$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit der Cramerschen Regel

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \end{array}$$

b) Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit ganzzahligen Einträgen, $A \in M(n \times n, \mathbb{Z})$. Zeigen Sie: Es gibt ein $B \in M(n \times n, \mathbb{Z})$ mit $A \cdot B = E_n$ genau dann, wenn $\det(A) = \pm 1$.