UNIVERSITÉ DE FRIBOURG SUISSE
UNIVERSITÄT FREIBURG SCHWEIZ

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

SP 2011 **Algèbre linéaire II, Série 13** Prof. Dr. Anand Dessai

à rendre avant le jeudi 24 février 2011, 16:00

Exercice 1. (4 points)

La règle de Sarrus présente l'algorithme suivant pour calculer le déterminant d'une matrice $A \in M(3 \times 3, \mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$: on recopie les deux premières colonnes de A à droite de la matrice A, cf. le diagramme suivant.

$$\left|\begin{array}{ccccc|cccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \times & & \times & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \swarrow & & \times & & \times & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}\right.$$

Montrez (par exemple avec la formule de Leibniz) que le déterminant $\det(A)$ est la somme des produits de triplets de composantes a_{ij} le long des diagonales, avec le signe $+$ dans le sens $\searrow$ et le signe $-$ dans le sans $\swarrow$, c.-à-d.

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - (a_{13}\, a_{22}\, a_{31} + a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + a_{12}\, a_{21}\, a_{33}).$$

Exercice 2. (4 points)

Calculez le déterminant de la matrice $A \in M(6 \times 6, \mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. (4 points)

Soit $v = (v_1, v_2)^T$ et $w = (w_1, w_2)^T$ deux points différents de $\mathbb{R}^2$ et soit L une droite affine qui passe par v et w. Montrez que $x = (x_1, x_2)^T \in L$ si et seulement si $\det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0.$

Exercice 4. (4 points)

a) Montrez en utilisant les trois axiomes sur les propriétés du déterminant, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a pour le déterminant de Vandermonde

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Utilisez par ex. l'induction.

b) Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ et soit $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe exactement un polynôme $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de degré $\leq n-1$ tel que $p(x_i) = y_i$, pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Exercice 5. (facultative avec 4 points de bonus)

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, soit $\Phi : V \to V$ un endomorphisme et soit $w \in V \setminus \{0\}$ un vecteur.

a) Montrez qu'il existe un polynôme $p(x) = x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ de degré $m \leq n$ tel que l'endomorphisme

$$p(\Phi) := \Phi^m + a_{m-1} \cdot \Phi^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot \Phi + a_0 \cdot \mathrm{id}_V : V \to V$$

est zéro en w, c.-à-d. $p(\Phi)(w) = 0$.

b) Supposons que $p(x)$ est scindé, c.-à-d. qu'on peut écrire $p(x)$ comme produit de polynômes du premier degré: $p(x) = (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_m)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$. Montrez qu'il existe un vecteur $v \in V \setminus \{0\}$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\Phi(v) = \lambda \cdot v$.