UNIVERITÉ DE FRIBOURG SUISSE
UNIVERSITÄT FREIBURG SCHWEIZ

DEPARTEMENT FÜR MATHEMATIK

FS 2011 **Lineare Algebra II, Serie 13** Prof. Dr. Anand Dessai

abzugeben vor dem 24. Februar 2011, 16:00

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Die Regel von Sarrus beschreibt den folgenden Algorithmus um die Determinante einer Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$, zu berechnen: man kopiert die ersten zwei Spalten von A rechts neben die Matrix A und erhält das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{|ccccc|cccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\
 & \searrow & & \swarrow\!\!\searrow & & \swarrow\!\!\searrow & & \swarrow & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\
 & \swarrow & & \swarrow\!\!\searrow & & \swarrow\!\!\searrow & & \searrow & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32}
\end{array}$$

Zeigen Sie (zum Beispiel mit der Leibniz-Formel), dass die Determinante $\det(A)$ die Summe der Produkte der Tripel a_{ij} entlang der Diagonalen ist (mit Vorzeichen $+$ in die Richtung $\searrow$ und mit Vorzeichen $-$ in die andere Richtung $\swarrow$), d.h.

$$\det(A) = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - (a_{13}\,a_{22}\,a_{31} + a_{11}\,a_{23}\,a_{32} + a_{12}\,a_{21}\,a_{33}).$$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix $A \in M(6 \times 6, \mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Seien $v = (v_1, v_2)^T$ und $w = (w_1, w_2)^T$ zwei verschiedene Punkte von $\mathbb{R}^2$ und sei L eine affine Gerade, die durch v und w geht. Zeigen Sie, dass $x = (x_1, x_2)^T \in L$ dann und nur dann, wenn $\det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0.$

Aufgabe 4. (4 Punkte)

a) Beweisen Sie mit Hilfe der drei Axiome für die Determinante, dass für die Vandermonde-Determinante gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & \cdots & (x_1)^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Benutzen Sie z.B. Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

b) Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ und seien $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es genau ein Polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad $\le n-1$ gibt, so dass $p(x_i) = y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Aufgabe 5. (Bonus-Aufgabe: 4 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n \ge 1$, sei $\Phi : V \to V$ ein Endomorphismus und sei $w \in V \setminus \{0\}$.

a) Zeigen Sie, dass es ein Polynom $p(x) = x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ vom Grad $m \le n$ gibt, so dass der Endomorphismus

$$p(\Phi) := \Phi^m + a_{m-1} \cdot \Phi^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot \Phi + a_0 \cdot \mathrm{id}_V : V \to V$$

in w Null ist, d.h. $p(\Phi)(w) = 0$.

b) Angenommen $p(x)$ zerfällt in Linearfaktoren, d.h. man kann $p(x)$ als das Produkt von Polynomen vom Grad 1 schreiben: $p(x) = (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_m)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass es einen Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ und ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ gibt mit $\Phi(v) = \lambda \cdot v$.