SA 2010 **Algèbre linéaire I, Série 12** Prof. Dr. Anand Dessai

à rendre avant le jeudi 23 décembre 2010, 16:00

Exercice 1. (4 points)

Par définition, un *code linéaire binaire* du type $[n, k]$ est un sous-espace vectoriel $C \subset (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ de dimension k. Les éléments (let *mots*) de C sont exprimés sous la forme de vecteurs lignes. On appelle *matrice génératrice* tout matrice $G \in M(k \times n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ dont les lignes forment une base de C. La matrice génératrice G est dite *standard* si elle possède pour k premières colonnes une matrice identité, c.-à-d. G est de la forme $G = (E_k\, P)$ où $P \in M(k\times(n-k), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

a) Déterminez une matrice génératrice standard pour le code (voir Série 5, Ex. 6)

$$W = \{(0000), (0011), (0110), (1001), (1100), (1010), (0101), (1111)\}$$

b) Soit $G = (E_k\, P)$ une matrice génératrice standard pour un code C linéaire binaire du type $[n, k]$. Considerez la matrice $H := (-P^T\, E_{n-k}) \in M((n-k) \times n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Montrez que

$$x \in C \iff H \cdot x^T = 0$$

Exercice 2. (4 points)

a) La matrice

$$R_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

décrit une rotation de $\mathbb{R}^3$ par l'angle α le long de l'axe y. Calculez $\det(R_\alpha)$.

b) Calculez $\det(B)$ pour la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5/3 & -4/3 \\ -4 & -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}$ de Série 10, Ex. 4.

c) Déterminez $\det(\phi)$ pour l'endomorphisme $\phi : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$, $p \mapsto p'$.

Exercice 3. (4 points)

Soit $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, triangulaire supérieure, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur la diagonale.

a) Montrez que son déterminant est égal à $\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

b) Montrez que $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$ où $e^A := E_n + A + A^2/2! + A^3/3! + \ldots$.

c) Montrez que $\det e^B = e^{\operatorname{tr} B}$ si B et A sont semblables.

Exercice 4.

Montrer que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} a^4+b^4 & b^4+c^4 & c^4+d^4 & d^4+a^4 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+d^3 & d^3+a^3 \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+d^2 & d^2+a^2 \\ a+b & b+c & c+d & d+a \end{pmatrix}$$

est zéro.