SA 2010 **Algèbre linéaire I, Série 11** Prof. Dr. Anand Dessai

à rendre avant le jeudi 16 décembre 2010, 16:00

Exercice 1. (4 points)

Soient

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad A, B \in M(3 \times 3, \mathbb{Q}).$$

a) Trouvez, s'il existent, un $v \in \mathbb{Q}^3 \setminus \{0\}$ t.q. $Bv = 6v$ et un $w \in \mathbb{Q}^3 \setminus \{0\}$ t.q. $Aw = 6w$.

b) Déterminez le rang de B.

c) Est-ce que A et B sont semblables? Pourquoi?

d) Est-ce que A et B sont équivalentes? Pourquoi?

Exercice 2. (4 points)

a) Soient $\mathcal{A} = (e_1, e_2) = ((1,0)^T, (0,1)^T)$ et $\mathcal{B} = ((1,-i)^T, (1,i)^T)$ deux bases de $\mathbb{C}^2$. Déterminez $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}, T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \in Gl_2(\mathbb{C})$.

b) Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. Soit $f_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ un homomorphisme tel que

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 \cos\theta - z_2 \sin\theta \\ z_1 \sin\theta + z_2 \cos\theta \end{pmatrix}.$$

i) Décrivez f_θ par rapport à la base canonique $\mathcal{A} = ((1,0)^T, (0,1)^T)$ de $\mathbb{C}^2$.

ii) Trouvez une base $\mathcal{B}$ telle que $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

Exercice 3. (4 points)

La *trace* $\operatorname{tr} A$ d'une matrice carrée $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$ est définie comme la somme des éléments diagonaux, $\operatorname{tr} : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

a) Montrez que pour $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ on a $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

b) Montrez que si A et $\tilde{A}$ sont des matrices semblables (ähnliche Matrizen), alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(\tilde{A})$.

Exercice 4. (4 points)

Soit $V := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

a) Montrez que $(V, +, \cdot)$ est un corps.

b) Montrez que dans V, l'équation $X^2 + E_2 = 0$ est solvable. Ici, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.