HS 2010 **Lineare Algebra I, Serie 11** Prof. Dr. Anand Dessai
zurückzugeben vor dem 16 Dezember 2010, 16:00

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad A, B \in M(3 \times 3, \mathbb{Q}).$$

a) Gibt es ein $v \in \mathbb{Q}^3 \setminus \{0\}$ mit $Bv = 6v$, gibt es ein $w \in \mathbb{Q}^3 \setminus \{0\}$ mit $Aw = 6w$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie den Rang von B.

c) Sind A und B ähnlich? Warum?

d) Sind A und B äquivalent? Warum?

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Betrachten Sie die Basen $\mathcal{A} = (e_1, e_2) = ((1,0)^T, (0,1)^T)$ und $\mathcal{B} = ((1,-i)^T, (1,i)^T)$ des $\mathbb{C}^2$. Bestimmen Sie $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}, T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} \in Gl_2(\mathbb{C})$.

b) Sei $\theta \in [0, 2\pi]$. Sei $f_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ der Homomorphismus

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 \cos\theta - z_2 \sin\theta \\ z_1 \sin\theta + z_2 \cos\theta \end{pmatrix}.$$

i) Beschreiben Sie f_θ bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{A} = ((1,0)^T, (0,1)^T)$ von $\mathbb{C}^2$.

ii) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ mit $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Die *Spur* $\operatorname{tr} A$ einer quadratischen Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$, ist definiert als die Summe der Elemente der Hauptdiagonalen, $\operatorname{tr} : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

a) Zeigen Sie, dass für $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ gilt: $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

b) Zeigen Sie, dass für ähnliche Matrizen A und $\tilde{A}$ gilt: $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(\tilde{A})$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei $V := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass $(V, +, \cdot)$ ein Körper ist.

b) Zeigen Sie, dass in V die Gleichung $X^2 + E_2 = 0$ lösbar ist. Hier ist $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.