Le test écrit aura lieu le lundi 13 décembre à 13h15 (dans la séance d'exercices)

Exercice 1. (4 points)

a) Montrez que pour tout $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$, $B, B' \in M(r \times m, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a

$$(B + B') \cdot A = B \cdot A + B' \cdot A \qquad \text{et} \qquad \lambda(B \cdot A) = (\lambda B) \cdot A = B \cdot (\lambda A).$$

b) Calculez tous les produits possibles de deux matrices parmi les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad D = (3, 2, 1).$$

Exercice 2. (4 points)

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 3 \\ 0 & -1 & -2\lambda \end{pmatrix} \in M(2 \times 3, \mathbb{C})$ une matrice avec un paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculez $A \cdot A^T$ et $A^T \cdot A$.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice. Calculez A^2, A^3, A^4 et A^{127}.

Exercice 3. (4 points)

Soit $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation du plan autour de zéro par l'angle $\pi/4$ (dans le sens anti-horaire) et soit $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la reflexion (miroitement) par rapport à la droite $\operatorname{span}((1,1)^T)$.
Soit $\mathcal{A} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B} = ((1,1)^T, (1,-1)^T)$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. Déterminez $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(R)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(R)$, $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(R)$, $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(S)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(S)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(S)$ et $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(S \circ R)$.

Exercice 4. (4 points)

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5/3 & -4/3 \\ -4 & -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}$ et soit $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto B \cdot x$.

a) Soit $v_1 = (0, 2, 1)^T$, $v_2 = (1, 0, 3)^T$. Calculez $\phi(v_1)$ et $\phi(v_2)$. Completéz les deux vecteurs en une base $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$, dans laquelle la matrice $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\phi)$ est égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Donc $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est une dilatation de facteur 3 le long de la direction v_3, et de facteur 1 (pas de changement) dans le plan $\operatorname{span}(v_1, v_2)$

b) Trouvez une autre base $\mathcal{A}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ de $\mathbb{R}^3$ avec $v'_3 = (-2, 2, -5)^T$, dans laquelle la matrice $M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}'}(\phi)$ est aussi diagonale.