SA 2010 **Lineare Algebra I, Serie 10** Prof. Dr. Anand Dessai

abzugeben vor dem 9 Dezember 2010, 16:00

Der schriftliche Test wird am 13. Dezember um 13:15 stattfinden (in der Übungsstunde)

Aufgabe 1. (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für alle $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$, $B, B' \in M(r \times m, \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$(B + B') \cdot A = B \cdot A + B' \cdot A \qquad \text{und} \qquad \lambda(B \cdot A) = (\lambda B) \cdot A = B \cdot (\lambda A).$$

b) Berechnen Sie alle möglichen Produkte von je zwei der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad D = (3, 2, 1).$$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 3 \\ 0 & -1 & -2\lambda \end{pmatrix} \in M(2 \times 3, \mathbb{C})$ eine Matrix mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie $A \cdot A^T$ und $A^T \cdot A$.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine Matrix. Berechnen Sie A^2, A^3, A^4 und A^{127}.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Rotation der Ebene um den Ursprung mit dem Winkel $\pi/4$ (im Gegen-Uhrzeigersinn) und sei $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden $\operatorname{span}((1,1)^T)$.
Seien $\mathcal{A} = (e_1, e_2)$ und $\mathcal{B} = ((1,1)^T, (1,-1)^T)$ zwei Basen von $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(R)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(R)$, $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(R)$, $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(S)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(S)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(S)$ und $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(S \circ R)$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5/3 & -4/3 \\ -4 & -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}$ und sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto B \cdot x$.

a) Sei $v_1 = (0, 2, 1)^T$, $v_2 = (1, 0, 3)^T$. Berechnen Sie $\phi(v_1)$ und $\phi(v_2)$. Vervollständigen Sie die beiden Vektoren zu einer Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$, bei der die Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\phi)$ gleich $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist.
Also ist $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Streckung um den Faktor 3 entlang des Vektors v_3, und um den Faktor 1 (keine Veränderung) in der Ebene $\operatorname{span}(v_1, v_2)$

b) Finden Sie eine Basis $\mathcal{A}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ von $\mathbb{R}^3$ mit $v'_3 = (-2, 2, -5)^T$, bei der die Matrix $M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}'}(\phi)$ auch diagonal ist.