SA 2010 **Algèbre linéaire I, Série 9** Prof. Dr. Anand Dessai

à rendre avant le jeudi 2 décembre 2010, 16:00

Exercice 1. (4 points)

Soit la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et $\phi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'homomorphisme associé à A. Trouvez une base de $\ker(\phi_A)$ et une base de $\operatorname{im}(\phi_A)$.

Exercice 2. (4 points)

Soit $V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{R}) \,\middle|\, b = c \right\} \subset M(2\times 2,\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices symétriques et soit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrez que $\mathcal{A} := (v_1, v_2, v_3)$ est une base de V.

b) Soit $E_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $\Psi_{\mathcal{A}}$ l'isomorphisme

$$\Psi_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^3 \to V, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3.$$

Calculez $\Psi_{\mathcal{A}}^{-1}(E_2)$ (c.-à-d. exprimez E_2 par une combinaison linéaire des v_i).

Exercice 3. (4 points)

Soit $\mathcal{A} := \{(0,1)^T, (1,1)^T\}$ la base de $V = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} := \{(1,1)^T, (1,-1)^T\}$ la base de $W = \mathbb{R}^2$. Exprimez la matrice associée (darstellende Matrix) de l'application

$$\Phi : V \to W, \quad (x_1, x_2)^T \mapsto (x_2, x_1)^T.$$

par rapport à la base $\mathcal{A}$ de V et à la base $\mathcal{B}$ de W.

Exercice 4. (4 points)

Soit $A \in M(m\times n, \mathbb{K})$, soit $b \in \mathbb{K}^m$ et soit $B := (A, b) \in M(m\times(n+1), \mathbb{K})$. Soit $\Phi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ et $\Phi_B : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^m$ les homomorphismes correspondants. Considérez le système d'équations linéaires $A \cdot x = b$. Montrez que

a) $\mathrm{Sol}(A, b) \neq \emptyset$ si et seulement si $\dim(\operatorname{im}\Phi_A) = \dim(\operatorname{im}\Phi_B)$.

b) $Ax = b$ a une solution unique si et seulement si $\dim(\operatorname{im}\Phi_A) = \dim(\operatorname{im}\Phi_B) = n$.