SA 2010 **Lineare Algebra, Serie 9** Prof. Dr. Anand Dessai

zurückzugeben vor dem 2. Dezember 2010, 16:00

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei A die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ und $\phi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ der zu A assoziierte Homomorphismus. Finden Sie eine Basis von $\ker(\phi_A)$ und eine Basis von $\operatorname{im}(\phi_A)$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei $V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \,\middle|\, b = c \right\} \subset M(2\times 2, \mathbb{R})$ der Unterraum der symmetrischen Matrizen und sei

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} := (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V ist.

b) Sei $E_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und sei $\Psi_{\mathcal{A}}$ der Isomorphismus

$$\Psi_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^3 \to V, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3.$$

Berechnen Sie $\Psi_{\mathcal{A}}^{-1}(E_2)$ (d.h. drücken Sie E_2 mit einer Linearkombination der v_i aus).

Aufgabe 3. (4 points)

Sei $\mathcal{A} := \{(0,1)^T, (1,1)^T\}$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} := \{(1,1)^T, (1,-1)^T\}$ eine Basis von $W = \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die darstellende Matrix der Abbildung

$$\Phi : V \to W, \quad (x_1, x_2)^T \mapsto (x_2, x_1)^T.$$

bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$, sei $b \in \mathbb{K}^m$ und sei $B := (A, b) \in M(m \times (n+1), \mathbb{K})$. Seien $\Phi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ und $\Phi_B : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^m$ die dazugehörigen Homomorphismen. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Sol}(A, b) \neq \emptyset$ dann und nur dann, wenn $\dim(\operatorname{im} \Phi_A) = \dim(\operatorname{im} \Phi_B)$.

b) $Ax = b$ hat eine eindeutige Lösung dann und nur dann, wenn $\dim(\operatorname{im} \Phi_A) = \dim(\operatorname{im} \Phi_B) = n$.