SA 2010 **Algèbre linéaire I, Série 8** Prof. Dr. Anand Dessai

à rendre avant le jeudi 25 novembre 2010, 16:00

Exercice 1. (4 points)

Résolvez par l'algorithme de Gauss; décrivez toutes les solutions:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & 4y & - & z & = & 9 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -4x & + & 3y & - & 6z & = & -23 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3i \cdot x_2 & - & x_3 & = & -i \\ 5i \cdot x_1 & + & 7 \cdot x_2 & - & 3i \cdot x_3 & = & 2 \end{array}$$

Exercice 2. (4 points)

a) Résolvez par l'algorithme de Gauss, décrivez toutes les solutions:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \end{array}$$

b) Trouvez tout $a \in \mathbb{R}$ tel que le système suivant a un nombre infini de solutions:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4a\,x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4a\,x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}$$

Exercice 3. (4 points)

Soit $a := (2, -1, 1)^T$ et $b := (-1, 0, 1)^T$ et soit V_a, resp. V_b deux plans dans $\mathbb{R}^3$, perpendiculaires à a, resp. b. Trouvez $V_a \cap V_b$. Quel est le rapport entre $V_a \cap V_b$ et $\mathrm{span}(a, b)$? Justifiez votre réponse.

Exercice 4. (4 points)

a) Soit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$ et $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. En utilisant l'algorithme de Gauss, montrez qu'il existe exactement un polynôme $p \in \mathbb{R}[x]_2$ tel que $p(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, 3$.

b) Soit $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$. Trouvez tous les polynômes $p(x) \in \mathbb{R}[x]_3$ qui interpolent ces 3 points, c'est-à-dire pour lesquels $p(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, 3$. Exprimez $p(x)$ d'abord dans la base canonique $(1, x, x^2, x^3)$ de $\mathbb{R}[x]_3$ et résolvez le système linéaire correspondant.