HS 2010 **Lineare Algebra I, Serie 8** Prof. Dr. Anand Dessai

zuŕuckzugeben vor dem 25 November 2010, 16:00

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe vom Gauss-Algorithmus; geben Sie alle Lösungen an:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & 4y & - & z & = & 9 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -4x & + & 3y & - & 6z & = & -23 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3i \cdot x_2 & - & x_3 & = & -i \\ 5i \cdot x_1 & + & 7 \cdot x_2 & - & 3i \cdot x_3 & = & 2 \end{array}$$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe vom Gauss-Algorithmus; geben Sie alle Lösungen an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \end{array}$$

b) Finden Sie jedes $a \in \mathbb{R}$ so dass das folgende Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4a\,x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4a\,x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}$$

und begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Seien $a := (2, -1, 1)^T$ und $b := (-1, 0, 1)^T$ und sei V_a, resp. V_b zwei Ebenen in $\mathbb{R}^3$, senkrecht auf a, resp. b. Geben Sie $V_a \cap V_b$ an. Was ist die Beziehung zwischen $V_a \cap V_b$ und $\operatorname{span}(a, b)$? Begründen Sie alle Ihre Antworten.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

a) Sei $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ so dass $x_1 < x_2 < x_3$ und $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es genau ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]_2$ gibt so dass $p(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, 3$, benützen Sie den Gauss-Algorithmus.

b) Sei $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$. Finden Sie alle Polynome $p(x) \in \mathbb{R}[x]_3$, die diese drei Punkte interpolieren, das heisst für diese Polynome gilt: $p(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, 3$. Drücken Sie $p(x)$ in der Kanonischen Basis $(1, x, x^2, x^3)$ von $\mathbb{R}[x]_3$ aus und lösen Sie das dazugehörige Gleichungssystem.