SA 2010 **Algèbre linéaire I, Série 7** Prof. Dr. Anand Dessai

à rendre avant le jeudi 18 novembre 2010, 16:00

Exercice 1. (4 points)

Montrez que pour chaque choix de vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^{100}$ les vecteurs

$$\begin{aligned} w_1 &:= v_1 + 7v_2 - 3v_3 \\ w_2 &:= 5v_1 - 2v_2 \\ w_3 &:= 8.7v_1 + 16.5v_2 - \sqrt{5}v_3 \\ w_4 &:= v_1 - v_2 - v_3 \end{aligned}$$

sont linéairement dépendents. Donnez une preuve rapide, sans calculer explicitement qu'un vecteur est une combinaison linéaire des autres.

Exercice 2. (4 points)

Démontrez les points suivants:

a) $\big(V = W_1 \oplus W_2\big) \Leftrightarrow \Big(V = W_1 + W_2 \text{ et } (w_1, w_2) \text{ linéairement indépendents, } \forall w_i \in W_i \setminus \{0\}\Big)$.

b) Si $\dim V < \infty$, on a $(V = W_1 \oplus W_2) \Longleftrightarrow (V = W_1 + W_2 \text{ et } \dim V = \dim W_1 + \dim W_2)$.

Exercice 3. (4 points)

Regardez les espaces vectoriels suivants:

$$\begin{aligned} V &:= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})^T \in \mathbb{R}^{2n} \,\middle|\, x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{2n} \\ W_1 &:= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})^T \in \mathbb{R}^{2n} \,\middle|\, x_1 + x_3 + \dots + x_{2n-1} = 0, x_2 + x_4 + \dots + x_{2n} = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{2n} \\ W_2 &:= \left\{ (r, -r, r, -r, \dots, r, -r)^T \in \mathbb{R}^{2n} \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2n} \end{aligned}$$

a) Calculez $\dim V$, $\dim W_1$ et $\dim W_2$.

b) Est-ce que V est la somme directe de W_1 et W_2? Justifiez votre réponse.

Exercice 4. (4 points)

a) Soit $\varphi : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$ une application linéaire. Montrez que $\dim \ker(\varphi) \geq 3$.

b) Soit $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire avec

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-8\\4\end{pmatrix}.$$

Spécifiez l'image $\mathrm{im}(\psi)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{im}(\psi)$ et de $\ker(\psi)$?

Exercice 5. (Bonus 4 points)

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $F : V \to V$ un homomorphisme (dans soi-même, donc c'est un endomorphisme). Soit $W_0 := V$, $W_{i+1} := F(W_i)$, $i = 0, 1, \dots$. Montrez qu'il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que $W_{m+i} = W_m$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.