SA 2010 **Lineare Algebra I, Serie 7** Prof. Dr. Anand Dessai

abgeben vor dem 18 November 2010, 16:00

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jede Wahl von Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^{100}$ die Vektoren

$$\begin{aligned} w_1 &:= v_1 + 7v_2 - 3v_3 \\ w_2 &:= 5v_1 - 2v_2 \\ w_3 &:= 8.7v_1 + 16.5v_2 - \sqrt{5}v_3 \\ w_4 &:= v_1 - v_2 - v_3 \end{aligned}$$

linear abhängig sind. Geben Sie einen schnellen Beweis, ohne einen Vektor explizit als Linearkombination der anderen auszurechnen.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\big(V = W_1 \oplus W_2\big) \Leftrightarrow \Big(V = W_1 + W_2$ und (w_1, w_2) sind linear unabhängig $\forall w_i \in W_i \setminus \{0\}\Big)$.

b) Falls $\dim V < \infty$, gilt $(V = W_1 \oplus W_2) \iff (V = W_1 + W_2$ und $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2)$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Vektorräume:

$$\begin{aligned} V &:= \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n})^T \in \mathbb{R}^{2n} \middle| x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{2n} \\ W_1 &:= \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n})^T \in \mathbb{R}^{2n} \middle| x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1} = 0, x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n} = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{2n} \\ W_2 &:= \left\{ (r, -r, r, -r, \ldots, r, -r)^T \in \mathbb{R}^{2n} \middle| r \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2n} \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Dimensionen $\dim V$, $\dim W_1$ und $\dim W_2$.

b) Ist V die direkte Summe von W_1 und W_2? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

a) Sei $\varphi : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $\dim \ker(\varphi) \geq 3$.

b) Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie das Bild $\mathrm{im}(\psi)$ der Abbildung ψ an. Berechnen Sie die Dimension von $\mathrm{im}(\psi)$ und von $\ker(\psi)$.

Aufgabe 5. Bonusaufgabe (4 Punkte)

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $F : V \to V$ ein Homomorphismus (es ist sogar ein Endomorphismus, da Start- und Zielraum gleich sind). Sei $W_0 := V$, $W_{i+1} := F(W_i)$, $i = 0, 1, \ldots$. Zeigen Sie, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $W_{m+i} = W_m$ für alle $i \in \mathbb{N}$.