SA 2010 **Algèbre linéaire I, Série 6** Prof. Dr. Anand Dessai

à rendre avant le jeudi 11 novembre 2010, 16:00

Notation

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. L'expression

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

s'appelle le *polynôme sur le corps* $\mathbb{K}$. Le *degré* $\deg(p)$ *du polynôme* p est défini par

$$\deg(p) := \begin{cases} \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}, & \text{si } p \neq 0, \\ -\infty, & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de tous les polynômes p de degré $\deg(p) \leq n$ est défini par

$$\mathbb{K}[x]_n := \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{K}, \text{pour } \forall i = 0, \dots, n\}$$

avec les opérations suivantes,

$$p + q := \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i \qquad , \qquad \lambda \cdot p := \sum_{i=0}^{n} (\lambda \cdot a_i) x^i,$$

pour tout polynôme $p, q \in \mathbb{K}[x]_n$, $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 1. (4 points)

Montrez que:

a) Les polynômes $p_0(x) := 1$, $p_1(x) := 3 + 5x$ et $p_2(x) := 2x - 3x^2$ forment une base de $\mathbb{R}[x]_2$.

b) Soit $p_0, p_1, \dots, p_n$ des polynômes arbitraires de $\mathbb{K}[x]_n$ avec $\deg(p_i) = i$, pour $i = 0, \dots, n$. Alors $p_0, p_1, \dots, p_n$ forment une base de $\mathbb{K}[x]_n$.

Notation

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\langle v, w \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$ pour tout $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$, $w = (w_1, w_2, w_3)^T \in \mathbb{R}^3$ s'appelle le *produit scalaire sur* $\mathbb{R}^3$ *(das Skalarprodukt auf* $\mathbb{R}^3$*)*. Nous disons que v est perpendiculaire à w (v ist orthogonal zu w), et nous ecrivons $v \perp w$, quand $\langle v, w \rangle = 0$. Pour un ensemble $W \subset \mathbb{R}^3$ nous définissons son *complément orthogonal dans* $\mathbb{R}^3$ par

$$W^{\perp} := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \perp w \quad \text{pour tout } w \in W\}.$$

Exercice 2. (4 points)

a) Montrez que $W^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$,

b) Soit $v = (1, 2, 3)^T$. Trouvez une base de $\{v\}^{\perp}$.

Exercice 3. (1+2+1 points)

Soit $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Soit $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f_n(x) := \begin{cases} \sin(x) & \text{pour } 2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

a) Dessinez le graphe de f_n.

b) Montrez que $f_0, \ldots, f_r$ sont linéairement indépendantes dans $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour chaque $r \in \mathbb{N}$.

c) Montrez que $\dim C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \infty$.

Exercice 4. (4 points)

a) Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et W un sous-espace vectoriel de V.
   i) Montrez que $\dim W \leq \dim V$.
   ii) Montrez que $(\dim W = \dim V) \Leftrightarrow (W = V)$.

b) Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie, W un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f: W \to V$ un homomorphisme surjectif. Montrez que $\dim W = \infty$.