UNIVERSITÉ DE FRIBOURG SUISSE
UNIVERSITÄT FREIBURG SCHWEIZ
DEPARTEMENT FÜR MATHEMATIK

SA 2010 **Lineare Algebra I, Serie 6** Prof. Dr. Anand Dessai
abgeben vor dem 11 November 2010, 16:00

Notation
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{K}$. Der Ausdruck

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

heisst *Polynom auf dem Körper* $\mathbb{K}$. Der *Grad* $\mathrm{grad}(p)$ *des Polynoms* p ist definiert durch

$$\deg(p) := \begin{cases} \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}, & \text{falls } p \neq 0 \\ -\infty, & \text{falls } p = 0. \end{cases}$$

Der $\mathbb{K}$-Vektorraum der Polynome p vom Grad $\deg(p) \leq n$ ist definiert durch

$$\mathbb{K}[x]_n := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,\middle|\, a_i \in \mathbb{K}, \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \right\}$$

mit den Operationen,

$$p + q := \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i \quad , \quad \lambda \cdot p := \sum_{i=0}^{n} (\lambda \cdot a_i) x^i$$

für alle Polynome $p, q \in \mathbb{K}[x]_n$, $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ und $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass
a) Die Polynome $p_0(x) = 1, p_1(x) = 3+5x$ und $p_2(x) = 2x-3x^2$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[x]_2$ ist.
b) Seien $p_0, p_1, \ldots, p_n$ beliebige Polynome in $\mathbb{K}[x]_n$ mit $\deg(p_i) = i$, für $i = 0, \ldots, n$. Dann formen $p_0, p_1, \ldots, p_n$ eine Basis von dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}[x]_n$.

Notation
Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\langle v, w \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$ für alle $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$, $w = (w_1, w_2, w_3)^T \in \mathbb{R}^3$ heisst *Skalarprodukt* auf $\mathbb{R}^3$. Wir sagen, dass v *senkrecht* auf w steht ($v \perp w$), wenn $\langle v, w \rangle = 0$. Sei $W \subset \mathbb{R}^3$ eine beliebige Teilmenge. Dann heisst

$$W^{\perp} := \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \middle| \, v \perp w \text{ für alle } w \in W \right\}$$

das *orthogonale Komplement von* W *in* $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $W^{\perp}$ ein Unter-Vektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Sei $v = (1, 2, 3)^T$. Finden Sie eine Basis von $\{v\}^{\perp}$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) := \begin{cases} \sin(x), & \text{falls } 2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad , \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeichnen Sie den Graph von f_n.

b) Zeigen Sie, dass $f_0, \ldots, f_r$ linear unabhängig in $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ für alle $r \in \mathbb{N}$ sind.

c) Zeigen Sie, dass $\dim C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \infty$ ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

a) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum von endlicher Dimension und W ein Unter-Vektorraum von V.
   i) Zeigen Sie, dass $\dim W \leq \dim V$
   ii) Zeigen Sie, dass $(\dim W = \dim V) \Longleftrightarrow (W = V)$

b) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum unendlicher Dimension, W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : W \to V$ ein surjektiver Homomorphismus. Zeigen Sie, dass $\dim W = \infty$.