SA 2010 **Lineare Algebra I, Serie 5** Prof. Dr. Anand Dessai

abgeben vor dem 4. November 2010, 16:00

Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ sei $v^T = (v_1, \cdots, v_n)$. Für $v = (v_1, \cdots, v_n)$ sei $v^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. v^T heisst transponierter Vektor von v.

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

a) $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x+y \\ x-y \end{pmatrix}$

b) $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |y| \\ |x| \end{pmatrix}$

c) $\det : M(2 \times 2, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$

d) $\varphi : \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$, $f \mapsto (f(1), 2f(2), 3f(3), 4f(4))$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Sei $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie, dass φ eine lineare Abbildung ist.
Ist φ injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv?

b) Gibt es eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit
$F\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $F\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$?
Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

a) Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $v_1 = (4, 8, 2)^T$, $v_2 = (\alpha, 2\alpha, -1)^T$ linear unabhängig?

b) Seien u_1 und u_2 zwei Vektoren in $\mathbb{R}^4$, mit $u_1 = (4, 2, -1, 3)^T$ und $u_2 = (-4, 2, 5, 5)^T$. Für welche α, $\beta \in \mathbb{R}$ ist der Vektor $v = (2, \alpha, \beta, 2)^T$ ein Element des Untervektorraums W von $\mathbb{R}^4$ erzeugt von $\{u_1, u_2\}$, $W := \mathrm{span}(u_1, u_2)$?

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sind die Vektoren v_1 et v_2 linear unabhängig?
a) $V = \mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, $v_1 = \sqrt{2}$, $v_2 = -\sqrt{10}$.

b) $V = \mathbb{C}^2$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, $v_1 = (3, i)^T$, $v_2 = (-i, \frac{1}{3})^T$.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Sei $W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) | a - b + c - d = 0 \right\}$ und sei $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $V_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Beweisen Sie, oder zeigen Sie das Gegenteil der folgenden Aussagen:

a) V_1 und V_2 sind linear unabhängig,

b) V_1 und V_2 erzeugen W,

c) V_1 und V_2 erzeugen $M(2 \times 2, \mathbb{R})$,

d) V_1 und V_2 bilden eine Basis von W.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Finden Sie eine Basis von dem $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$