SA 2010 **Algèbre linéaire I, Série 4** Prof. Dr. Anand Dessai

à rendre avant le jeudi 21 octobre 2010, 16:00

Exercice 1. (4 points)

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrez que

a) $0 \cdot v = 0_V$ pour tout $v \in V$, (ici, $0_V \in V$ dénote l'élément zéro dans l'espace V),

b) $(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$ pour tout $v \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 2. (4 points)

Soit

$$K := \mathbb{Q}(\sqrt{-11}) := \left\{ a + i \cdot b\sqrt{11} \quad | \quad a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{C} \quad \text{et} \quad O := \left\{ a + i \cdot b\sqrt{11} \quad | \quad a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subset K.$$

Montrez que

a) K est un sous-corps (ein Unterkörper) de $\mathbb{C}$,

b) O est un sous-anneau (ein Unterring) de K.

Exercice 3. (4 points)

Décidez, quels ensembles W ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de V. Justifiez.

a) $V = \mathbb{R}^2, \quad W := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in V \quad | \quad 2v_1 - 3v_2 = v_1^2 + v_2^2 \right\}.$

b) $V = \mathbb{R}^3, \quad W := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in V \quad | \quad 2v_1 - 3v_2 = 0 \right\}.$

c) $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad W := \{ f \in V \quad | \quad f(x+1) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \}$,
où $\mathrm{Map}(X, Y)$ dénote l'ensemble des applications $f : X \to Y$.

d) $V = \mathbb{R}^4, \quad W := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in V \quad | \quad v_2 + v_4 \geq 0 \right\}.$

Exercice 4. (2+2 points)

a) Calculez des nombres complexes:
i) $(2i)^{-4}$, ii) $\dfrac{1-i}{1+i}$, iii) $|4 - 3i|$, iv) z^{-1}, où $z = (2, \pi/3)$ en coordonnées polaires.

b) Soit $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application de conjugaison (die Konjugationsabbildung), $a + ib \mapsto a - ib$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. Montrez que c est un isomorphisme de corps.